

W. AHRENS

SCHERZ UND ERNST
IN DER MATHEMATIK





(8-1)

MATH. STAT.

205

6. H
1. 1. 1. 1. 1.

1. 1. 1. 1. 1.

SCHERZ UND ERNST IN DER MATHEMATIK

GEFLÜGELTE UND UNGEFLÜGELTE WORTE

GESAMMELT UND HERAUSGEGEBEN

VON

DR. W. AHRENS
IN MAGDEBURG



LEIPZIG
VERLAG VON B. G. TEUBNER
1904

cut. for Math-Stat. Lib.

Gift of M. W. Haskell

vol. 1.

MATH-STAT.

QA7
A45MATH.
STAT.
LIBRARY

Vorwort.

Bücher¹⁾ sind, einem bekannten Wort Beaumarchais' zufolge, wie die „Kinder der Frauen“: „conçus avec volupté, menés à terme avec fatigue, enfantés avec douleur“. Der Autor des vorliegenden Buches, der der bequemen und ungefährlichen Kunst gehuldigt hat, ein Buch zu „schreiben“, das von anderen „verfaßt“, ja der sogar bei der Wahl des Titels diesem Grundsatz treu geblieben ist, ist begreiflicherweise über jene erste der drei Entwicklungsphasen Beaumarchais' kaum hinausgekommen. Doch vielleicht ist gerade dies der schlagendste Beweis für die Unfertigkeit dessen, das nunmehr der Öffentlichkeit übergeben wird. Wie dem immer auch sei — ich hoffe das bescheidene Ziel, das ich mir gesteckt, zu erreichen; würde ich doch meine Mühe hinreichend belohnt finden, wenn das zunächst zu meiner eigenen Unterhaltung und Erholung gesammelte Material auch anderen Fachgenossen Unterhaltung und Erheiterung in Mußestunden gewähren würde.

Bei dieser Bestimmung des Buches für die Unterhaltungslektüre habe ich, wenn auch die Anordnung der Citate keine ganz willkürliche ist, von einer strengen Systematik, — die, wie ich befürchten mußte, nur ermüdend wirken, übrigens auch kaum durchführbar sein würde, — ebenso wie von einer Einteilung des Ganzen in Abschnitte, von vorneherein absehen zu sollen

¹⁾ In einem Buch, dessen vornehmste und einzige Aufgabe darin besteht, richtig zu citieren, darf hier nicht die Bemerkung unterlassen werden, daß der Urvater des „Figaro“ an der betreffenden Stelle („Lettre modérée sur la chute et la critique du barbier de Séville“; Oeuvres complètes, t. 1 (1809), p. 372) nur von Dramen spricht.

geglaubt. Durch Berücksichtigung auch derjenigen Literatur, die dem Fachmathematiker ferner liegt, hoffe ich auch diesem noch einiges zu bieten, auf das seine Aufmerksamkeit bisher vielleicht nicht gerade gelenkt wurde und das ihn doch interessieren möchte. Insbesondere dürften aber angehende Mathematiker hier eine bequeme Möglichkeit finden, sich auch bibliographisch über die, wenn ich so sagen darf, „schöngeistige“ mathematische Literatur zu unterrichten, auf die hingewiesen zu werden, sie in ihrem offiziellen Bildungsgang naturgemäß wenig Gelegenheit haben, und möchten somit aus diesem Buch die Anregung zu weiterer Lektüre schöpfen. Dieser Umstand bestimmte mich auch, die Titel von Vorträgen usw. möglichst überall genau anzugeben, auch dort, wo das eigentliche Thema der betreffenden Schrift mit dem daraus entnommenen Citat nur in ganz losem Zusammenhang stand und wo ich daher in meinen ursprünglichen Aufzeichnungen den Titel bisweilen ganz fortgelassen hatte. Schließlich habe ich mir noch die Aufgabe gestellt, solche Worte, die für die Fach- oder selbst Laienwelt als geflügelte gelten dürfen und ihrem Inhalte nach hierher gehören, aufzunehmen, jedoch ohne daß diesen etwa eine gesonderte oder gar hervorragende Stelle zugewiesen wäre; ihre Einreihung unter andere Citate war oft nicht ohne gewissen Zwang möglich, so daß einige von ihnen, wenn eben nicht *επεα πτερόεντα*, besser fortgeblieben wären. Jedoch schien mir die Aufnahme solcher Worte um so wünschenswerter, als die Untugend, falsch zu citieren, bekanntlich nicht bloß eine Spezialität der Tagespresse ist, vielmehr auch aus der wissenschaftlichen Literatur mit Leichtigkeit vielfache Belege dafür beigebracht werden könnten, daß nur zu oft nach dem Xenienwort verfahren wird:

Allegire der Erste nur falsch, da schreiben ihm zwanzig
Immer den Irrthum nach, ohne den Text zu besehn.

Für diejenigen Leser zumal, welche das Buch auch als Citatenschatz für gelegentliche literarische oder sonstige Zwecke zu benutzen gedenken, habe ich ein umfangreiches Register beigegeben, das jedoch, ohne ungebührlich lang zu werden, nicht

so ausführlich gestaltet werden konnte, wie dies bei dem heterogenen Inhalt des Buches an sich möglich und manchem vielleicht erwünscht wäre. — Der Begriff *Vollständigkeit* entbehrt schon bezüglich der sogenannten „geflügelten Worte“ — von den nicht geflügelten natürlich gar nicht zu reden — jeder Bedeutung, und ich hoffe daher, man werde mir das Fehlen solcher Worte, die man vielleicht mit Bedauern vermißt, insbesondere auch aus der nichtfachlichen Literatur, umsoweniger zum Vorwurf machen, als ich eben, wie schon oben gesagt, nur die Gelegenheitsfrüchte einer in der Hauptsache ganz unsystematisch betriebenen Lektüre zu bieten mir vorgenommen.¹⁾ Es war auch nicht einmal mein Bestreben, jeden Autor unbedingt gerade mit solchen Aussprüchen auftreten zu lassen, die für seine wissenschaftliche Stellung, seine Denkweise, überhaupt seine ganze Individualität besonders charakteristisch sind; auch wird man in der Zahl der Citate nicht einen Maßstab für die dem betreffenden Autor beigelegte Bedeutung erblicken dürfen, vielmehr waren hier neben persönlichen Liebhabereien vorwiegend mehr zufällige Momente ausschlaggebend und mußten es aus naheliegenden Gründen sein. So knüpft z. B. eine recht große Zahl von Citaten an die Namen Gauss und Jacobi an. Geben nun allerdings auch diese beiden glänzenden Namen an sich hierfür schon eine hinreichende Rechtfertigung, so war dabei für mich doch weiter noch bestimmend, daß über den ersteren ein größeres biographisches Werk — fast 50 Jahre nach seinem Tode — immer noch nicht existiert und bezüglich des letzteren, daß wenn auch hier ein derartiges Werk von hervorragender Seite ganz nahe bevorsteht, infolge der diesjährigen Centenarfeier noch ein besonderes erhöhtes Interesse in Fachkreisen vorausgesetzt werden darf. — Prinzipiell ausgeschlossen sind natürlich solche Aussprüche, für die Belege aus der Literatur nicht beigebracht werden können, auch wenn sie an sich hinreichend verbürgt erscheinen.

¹⁾ Natürlich würde ich etwaige Wünsche und Winke aus dem Leserkreise bereitwilligst und mit Dank berücksichtigen, falls eine neue Auflage sich vernetwendigen sollte.

Ich habe mir ferner nicht verhehlt, daß eine solche Sammlung von zum beträchtlichen Teil der modernen Literatur entnommenen Citaten leicht die Gefahr bietet, Anstoß zu erregen, was unter Umständen vielleicht schon durch die Gruppierung von an sich harmlosen Worten geschehen könnte. Mehrere Citate meiner Sammlung sind daher mit Rücksicht auf noch lebende Personen fortgelassen worden. Die Selbst-Kompromittierung — zweifellos eins der elementarsten Menschenrechte — habe ich dagegen niemandem, weder Toten noch Lebenden, verwehren zu dürfen geglaubt; der Leser mag entscheiden, welche Worte er als hierher gehörig betrachten will.

Das einzige ältere Werk, das man mit dem vorliegenden seinem Charakter nach vergleichen könnte, ist, so viel mir bekannt, das Buch Rebières „*Mathématiques et Mathématiciens*“ (3^{ième} Édition 1898), jedoch unterscheidet sich dieses von dem meinigen so wesentlich,¹⁾ daß es mir für meine Zwecke keinerlei irgendwie nennenswerte Dienste leisten konnte: Zunächst wird dort der Stoff nach gewissen, allerdings mehr äußerlichen Grundsätzen angeordnet, indem z. B. in einen ersten Teil „*morceaux choisis et pensées*“, in einen zweiten „*variétés et anecdotes*“, in einen dritten „*paradoxes et singularités*“ usw. verwiesen werden. Sodann fehlt dort jede Angabe der Quelle; dies erschwert eine Kontrolle nicht nur sehr, sondern schließt sie oft geradezu aus und hat den weiteren Nachteil, daß es einem Interessenten recht unbequem gemacht wird, über ein aus dem Zusammenhang gerissenes und daher leicht mehr oder minder beeinträchtigtes Wort an der Originalstelle im Zusammenhang genauere Orientierung zu suchen. Für manche der Rebièreschen Citate dürften Belegstellen aus der Literatur überhaupt nicht beizubringen sein, und ich habe daher auch nur ein einziges Citat von dort übernommen (s. S. 437), dessen Aufnahme ich möglicherweise

¹⁾ Noch weit mehr gilt dies von Maupin, „*Opinions et curiosités touchant la Mathématique*“, über dessen Anlage ich allerdings nur nach seinem ersten Teil urteile, während ein — wofern ich nicht irre — kürzlich erschienener zweiter Teil mir noch unbekannt ist, ebenso wie auch das Buch Rebière's „*Pages choisies des Savants modernes*“.

auch schon gezwungen sein werde, mit dem „se non è vero, è ben trovato“ zu motivieren. Im Gegensatz zu dem Rebière-schen Buch ist bei mir überall die betreffende Belegstelle möglichst genau angegeben, bei mehrfach abgedruckten Sachen oft sogar mehrere Stellen, obwohl ich eine Verpflichtung in letzterer Hinsicht allerdings nicht anerkannt habe. Alle von mir angegebenen Stellen sind auch von mir selbst eingesehen, Ausnahmen hiervon sind extra bemerkt. — Für einige Aussprüche, für welche mehrere oder vielfache Belege aus der Literatur gegeben werden könnten, eignete sich aus äußeren Gründen die älteste der mir bekannten Stellen für meine Zwecke weniger und mußte daher einer neueren weichen; jedoch ist dann tunlichst auf solche ältere Stellen verwiesen (s. z. B. S. 228). Im Gegensatz zu Rebière, der alle Citate nur in französischer Sprache wiedergibt, habe ich die Originalsprache stets¹⁾ beibehalten und auf hinzugefügte Übersetzungen, so weit mir dies irgend angebracht erschien, verzichtet. Dies letztere gilt natürlich zunächst von den französischen Citaten, die fast so zahlreich wie die deutschen sein dürften, sodann aber auch von den weniger häufigen englischen, italienischen und lateinischen. Den vereinzelt Citaten aus einer anderen Sprache habe ich eine deutsche Übersetzung beigegeben, falls nicht meine Quelle mir die Reproduktion einer Übersetzung in eine andere der oben genannten Sprachen gestattete. In allen Citaten sind Wortlaut und Schreibweise der Belegstellen getreu beibehalten, und zwar normierte bei solchen Sachen, die an mehreren Stellen erschienen sind und dort fast regelmäßig in Kleinigkeiten divergieren, eine der angegebenen Belegstellen, jedoch nicht immer gerade die an erster Stelle angeführte. Die buchstabengetreue Reproduktion eines Citats, z. B. einer Briefstelle, scheint mir an sich das

¹⁾ Eine Ausnahme bilden allerdings begreiflicherweise ein paar russische und ein hebräisches Citat, bei denen ich — auch ohne meine völlige Unkenntnis der betreffenden Sprachen — auf eine Reproduktion der Originale verzichtet haben würde, da diese für die Mehrzahl meiner Leser doch wahrscheinlich wertlos gewesen wären, zumal die betreffenden Citate nicht für sonderlich wichtig angesehen werden dürften.

einzig richtige zu sein, wobei ich mir gestatte, auf die Worte zu verweisen, mit welchen die Herren Stäckel und Schmidt dieses bei Herausgabe des Briefwechsels Gauss-W. Bolyai von ihnen beobachtete Verfahren rechtfertigen, wo l. c. p. 172 mit Recht bemerkt wird, daß anderenfalls „das Charakteristische zerstört und dem Biographen wie dem Sprachforscher wichtiges Material entzogen wird, ganz abgesehen davon, daß auch die neue Rechtschreibung der Gefahr des Veraltens ausgesetzt ist“, welch' letzteres Moment mir um so berücksichtigenswerter zu sein scheint, als in Deutschland schon seit geraumer Zeit bei dem beständigen Fluß der sogenannten „Rechtschreibung“ und dem dadurch bedingten Antagonismus zwischen den jeweiligen amtlichen Vorschriften und den selbst in Amtsstuben gebräuchlichen Spezial-„Orthographien“ von einer „Rechtschreibung“ überhaupt kaum noch die Rede sein kann. Allerdings hat die Befolgung dieses Prinzips der getreuen Wiedergabe in meinem Falle einige Ungleichmäßigkeiten zur Folge, hierfür nur ein Beispiel: Während ich also einen Brief Gauss' an Bolyai dem oben angegebenen Grundsatz der Herausgeber zufolge in der Original-Schreibweise zu reproduzieren in der Lage bin, — ebenso übrigens auch Briefe Gauss' an H. C. Schumacher, — bin ich gezwungen, einen Brief des „Princeps mathematicorum“ an Bessel in einer der vor 25 Jahren üblichen Rechtschreibung einigermaßen assimilierten und einen solchen an Olbers in einer noch neueren, natürlich auch „Orthographie“ genannten Schreibweise wiederzugeben.¹⁾ Einige offenbare Versehen oder Druckfehler

1) Zu welchen Ungereimtheiten dies führt, dafür nur einige Beispiele: Während Gauss in seinen Briefen an Bessel noch „Coefficient“ schreiben darf, darf er in seinem Verkehr mit Olbers nur mit „Koefficienten“ operieren; wird eine andere Gauss'sche Korrespondenz, etwa die bisher nur auszugsweise publizierte mit Encke, einen Herausgeber gleich modernisierender Tendenzen finden, so werden dort sicherlich nur noch „Koeffizienten“ gestattet sein — und da möglicherweise die wandelbaren Neigungen unserer amtlichen Rechtschreibung auch von dem Gesetz beherrscht werden: „On revient toujours à son premier amour“, so dürften eventuell spätere Editionen Gauss'scher Briefe wieder die umgekehrte Entwicklung zu der Original-Schreibweise zurück nehmen. Übrigens

in den Citaten habe ich allerdings verbessert; späterhin, seitdem ich den Plan einer Publikation hatte, sind auch solche Änderungen, wie unten angegeben, gekennzeichnet, jedoch schien mir die große Mühe, alle Citate auf diese und ähnliche Kleinigkeiten vor dem Druck nochmals zu prüfen, in gar keinem Verhältnis zu dem Wert der Sache zu stehen, zumal ja die Worte an den angegebenen Originalstellen von Interessenten in besonderen Fällen doch jedenfalls nachgeprüft werden würden. Bei einigen wenigen Citaten habe ich auch wohl zwei Absätze umgestellt, wenn hierdurch das aus dem Zusammenhang gerissene Citat leichter verständlich wurde, auch sonstige unwesentliche Änderungen vorgenommen, z. B. ein durch Aufhebung des Zusammenhangs überflüssig gewordenes Verbindungswort fortgelassen oder dgl., ohne daß es mir — aus dem angegebenen Grunde — möglich war, dies immer anzugeben resp. anzudeuten. Einige wenige Citate werden erst durch die vorhergehenden verständlich, andere haben erläuternde Zusätze erhalten, von denen einige („Noten“) aus technischen Gründen an das Ende des Buches gesetzt werden mußten. Jedoch glaubte ich hinsichtlich solcher Erläuterungen nicht allzu weit gehen zu dürfen, da allzuvieler Anmerkungen den Leser nur belästigen; bei einzelnen vielleicht überflüssig erscheinenden Zusätzen wolle der deutsche Leser berücksichtigen, daß das Buch sich vielleicht auch außerhalb Deutschlands einige Freunde erwerben möge.

kann man hierfür leicht schon jetzt Belege beibringen: ich greife drei Briefe Gauss' heraus, welche alle dem Jahre 1814 angehören und auf einen Zeitraum von nur 2 Monaten (13. Sept. — 13. Nov.) entfallen; in dem 1860 erschienenen Band I des Briefwechsels Gauss-Schumacher heißt es p. 108: „*diesmal*“ (Original-Schreibweise), in dem 1880 publizierten Briefwechsel Gauss-Bessel dagegen (p. 203) modernisiert: „*diess Mal*“, schließlich nach abermals 20 Jahren in dem 1900 ausgegebenen Briefwechsel Gauss-Olbers (p. 561) wieder: „*diesmal*“. — Zudem wird mit der Modernisierung in keinem der beiden erwähnten Werke wirklich radikal vorgegangen, so daß man selbst in dem neueren Werke Schreibweisen findet, die schon jetzt als veraltet anzusehen sind und daher möglicherweise von einzelnen Lesern störend empfunden werden, womit dann natürlich das Hauptargument für das beobachtete Verfahren ziemlich hinfällig wird.

Ließen sich erläuternde Zusätze zwanglos in den Text des Citats selbst einfügen, so ist dies geschehen, zumal immer dann, wenn hierfür auch eigene, vorher oder nachher gebrauchte Worte des citierten Autors benutzt werden konnten; solche Zusätze im Text sind in eckige Klammern [] eingeschlossen, während runde Klammern () original sind, also von dem citierten Autor herrühren. Ebenso bedeuten in den Stellenangaben und bei Übersetzungen eckige Klammern Zusätze von mir, während eine dem betreffenden citierten Werk entnommene Übersetzung oder die Zusätze von Herausgebern — z. B. in einer Briefstelle das vom Herausgeber zugesetzte Datum oder dgl. — in runde Klammern eingeschlossen sind. Die mit Ziffern 1) etc. eingeleiteten Fußnoten rühren, wofern nicht anders bemerkt, von mir her, während die dem Citat als solchem angehörenden Anmerkungen unmittelbar auf das Citat folgen und durch Asterisken (*) eingeführt sind (z. B. S. 50). Bei den Hinweisen, welche die Fußnoten geben, bezieht sich, wenn die Seitenzahl durch „S.“ bezeichnet ist, der Hinweis auf *dieses* Buch selbst, während bei einem Hinweis auf eine andere Stelle des *citierten* Werkes diese durch ein „p.“ charakterisiert ist. Sind in den Stellenangaben Verlagsort und Verlagsjahr vermerkt, so sind diese zur Unterscheidung von anderen Orts- und Zeitangaben in runde Klammern geschlossen, so daß eine Angabe, wie z. B. „Verhandl. des 1. intern. Mathem.-Congr. Zürich 1897 (Leipzig 1898)“ ohne weiteres verständlich sein dürfte. Bei Zeitschriften, bei denen mehrere Serien zu unterscheiden sind, folgt die wie üblich in runde Klammer geschlossene Serienzahl auf den Namen der Zeitschrift, worauf dann die Zahl des Bandes kommt. Bei den sehr häufigen Stellen aus Briefen sind, abgesehen von einigen besonderen Fällen, Ort und Datum, unbeschadet der Schreibweise des Originals, der Einfachheit und Übersichtlichkeit halber, in gleicher Weise angegeben und zwar nach dem folgenden Muster:

Magdeburg, 18. V. 1904.

W. Ahrens.

Der Zweck der Wissenschaft ist, die Wirklichkeit zu begreifen und das Vergängliche aufzufassen als die Erscheinungsform des Unvergänglichen, des Gesetzes.

H. VON HELMHOLTZ.

s. „Anspr. u. Red. geh. bei der Helmholtz-
Feier 2. XI. 1891“ (Berlin 1892), p. 13.

Omnis philosophiae difficultas in eo versari videtur, ut a phaenomenis motuum investigemus vires naturae, deinde ab his viribus demonstramus phaenomena reliqua.

ISAAC NEWTON.

„Principia mathem. philosophiae naturalis“,
Auctoris praefatio ad lectorem.

Unter Erklären versteht der Naturforscher nichts anderes, als das Zurückführen auf möglichst wenige und möglichst einfache Grundgesetze, über die er nicht weiter hinaus kann, sondern sie schlechthin fordern muss, aus ihnen aber die Erscheinungen erschöpfend vollständig als nothwendig ableitet.

GAUSS.

„Erdmagnetismus und Magnetometer.“
s. Werke, Bd. 5 (1877), p. 315/316.

Das endliche Ziel der theoretischen Naturwissenschaften ist, die letzten unveränderlichen Ursachen der Vorgänge in der Natur aufzufinden. Ob nun wirklich alle Vorgänge auf solche zurückzuführen seien, ob also die Natur vollständig begreiflich sein müsse, oder ob es Veränderungen in ihr gebe, die sich dem Gesetze einer nothwendigen Causalität entziehen, die also in das Gebiet einer Spontaneität, Freiheit, fallen, ist hier nicht der Ort zu entscheiden; jedenfalls ist es klar, dass die Wissen-

schaft, deren Zweck es ist, die Natur zu begreifen, von der Voraussetzung ihrer Begreiflichkeit ausgehen müsse, und dieser Voraussetzung gemäss schliessen und untersuchen, bis sie vielleicht durch unwiderlegliche Facta zur Anerkenntniss ihrer Schranken genöthigt sein sollte.

HELMHOLTZ.

„Über die Erhaltung der Kraft“, Votr. phys. Ges.
Berlin 23. VII. 1847.

s. Ostwald's Klassiker d. exakt. Wiss. No. 1, p. 4.

Ein Gewitter, welches die Sonne verdunkelt, heisst Zufall: eine, durch den Mond verursachte Sonnenfinsterniss heisst nicht Zufall: von dem einen Ereignisse wissen wir nicht die Ursachen, von dem anderen sind sie uns sehr bekannt; — es hat aber eine Zeit gegeben, wo eine Finsterniss auch Zufall hiess — viele Dinge, welche jetzt Zufall heissen, werden in der Folge diesen Namen verlieren und es ist überhaupt klar, dass der ganze Begriff relativ ist. Als Newton anfang Licht in der Welt zu verbreiten, wurde Vieles aus dem dunklen Reiche des Zufalls hervorgezogen; ein anderer Newton würde die Ursachen anderer Dinge enthüllen, und es ist ein Verstand denkbar, für welchen wenig Zufälliges übrig bleiben würde.

F. W. BESSEL.

„Über Wahrscheinlichkeitsrechnung.“

s. Populäre Vorlesungen, herausg. v. Schumacher
(Hamburg 1848), p. 391.

Tous les événements, ceux même qui par leur petitesse, semblent ne pas tenir aux grandes lois de la nature, en sont une suite aussi nécessaire que les révolutions du soleil. Dans l'ignorance des liens qui les unissent au système entier de l'univers, on les a fait dépendre des causes finales, ou du hasard, suivant qu'ils arrivaient et se succédaient avec régularité ou sans ordre apparent; mais ces causes imaginaires ont été successivement reculées avec les bornes de nos connaissances, et disparaissent entièrement devant la saine philosophie qui ne

voit en elles, que l'expression de l'ignorance où nous sommes des véritables causes. — — — — —

Nous devons . . envisager l'état présent de l'univers, comme l'effet de son état antérieur, et comme la cause de celui qui va suivre. Une intelligence qui pour un instant donné, connaîtrait toutes les forces dont la nature est animée, et la situation respective des êtres qui la composent, si d'ailleurs elle était assez vaste pour soumettre ces données à l'analyse, embrasserait dans la même formule, les mouvemens des plus grands corps de l'univers et ceux du plus léger atome: rien ne serait incertain pour elle, et l'avenir comme le passé, serait présent à ses yeux. L'esprit humain offre dans la perfection qu'il a su donner à l'astronomie, une faible esquisse de cette intelligence. Ses découvertes en mécanique et en géométrie, jointes à celle de la pesanteur universelle, l'ont mis à portée de comprendre dans les mêmes expressions analytiques, les états passés et futurs du système du monde. En appliquant la même méthode à quelques autres objets de ses connaissances, il est parvenu à ramener à des lois générales, les phénomènes observés, et à prévoir ceux que des circonstances données doivent faire éclore. Tous ses efforts dans la recherche de la vérité, tendent à le rapprocher sans cesse de l'intelligence que nous venons de concevoir, mais dont il restera toujours infiniment éloigné. Cette tendance propre à l'espèce humaine, est ce qui la rend supérieure aux animaux; et ses progrès en ce genre, distinguent les nations et les siècles, et fondent leur véritable gloire.

LAPLACE.

„Essai philosophique sur les probabilités“,
3ième éd. (Paris 1816), p. 2—4.

Kennte man alle Kräfte der Natur und wüßte man, welches der Zustand der Materie in einem Zeitpunkte ist, so würde man ihren Zustand für jeden späteren Zeitpunkt durch die Mechanik ermitteln, und ableiten können, wie die mannigfaltigen Naturerscheinungen einander folgen und begleiten. Das

höchste Ziel, welches die Naturwissenschaften zu erstreben haben, ist die Verwirklichung der eben gemachten Voraussetzung, also die Ermittlung der Kräfte, welche in der Natur vorhanden sind, und des Zustandes, in dem die Materie in einem Augenblicke sich befindet, mit einem Worte, die Zurückführung aller Naturerscheinungen auf die Mechanik.

G. KIRCHHOFF.

„Über das Ziel der Naturwissenschaften“,
Akad. Festrede Heidelberg 22. XI. 1865, p. 9.

Naturerkennen — genauer gesagt naturwissenschaftliches Erkennen oder Erkennen der Körperwelt mit Hülfe und im Sinne der theoretischen Naturwissenschaft — ist Zurückführen der Veränderungen in der Körperwelt auf Bewegungen von Atomen, die durch deren von der Zeit unabhängige Centralkräfte bewirkt werden, oder Auflösen der Naturvorgänge in Mechanik der Atome. Es ist psychologische Erfahrungsthatsache, dass, wo solche Auflösung gelingt, unser Causalitätsbedürfniss vorläufig sich befriedigt fühlt. Die Sätze der Mechanik sind mathematisch darstellbar, und tragen in sich dieselbe apodiktische Gewissheit, wie die Sätze der Mathematik. Indem die Veränderungen in der Körperwelt auf eine constante Summe von Spannkraften und lebendigen Kräften, oder von potentieller und kinetischer Energie zurückgeführt werden, welche einer constanten Menge von Materie anhaftet, bleibt in diesen Veränderungen selber nichts zu erklären übrig.

EMIL DU BOIS-REYMOND.

„Über die Grenzen des Naturerkennens“,
Votr. Naturf.-Vers. Leipzig 1872
s. Reden, Bd. 1 (1886), p. 105/106.

Im ganzen möchte das Laplacesche Ideal der überwiegenden Mehrzahl der heutigen Naturforscher kaum fremd sein.

E. MACH.

„Die ökonomische Natur der physikalischen Forschung“,
Votr. Wien Akad. d. Wiss. 1882.
s. „Populär-wissensch. Vorles.“, 3. Aufl. (Leipzig 1903), p. 217.

Nur vom Boden der exakten Wissenschaften her, für welche wieder die Mathematik der Lebensnerv ist, entspringt für uns eine einwandfreie Erkenntnis; sie sind nach meiner Auffassung berufen, das letzte Wort in allen Fragen nach dem Wesen der Dinge zu sprechen. Dass . . hier voreilige Verallgemeinerungen auftreten können, die uns verwirren und deprimieren, muss zugegeben werden. Die Welt nach dem Bilde Dubois-Reymond's, aufgelöst in ein Wirrsal reinen Centralkräften unterworfenen Atome und Moleküle, deren Bewegungsgleichungen auch schon durch einen überlegenen Geist integriert gedacht werden können, ist eine trostlos öde Grundlage für eine ethische Weltanschauung.

A. STODOLA.

„Über die Beziehungen der Technik zur Mathematik.“
s. Verhandl. d. 1. intern. Mathem.-Congr. Zürich 1897
(Leipzig 1898), p. 270.

= Zeitschr. d. Ver. deutscher Ingenieure, Bd. 41, No. 44
(1897), p. 1260.

Ausser der Zusammenfassung möglichst vieler Thatsachen in eine übersichtliche Form hat die Naturwissenschaft noch eine andere Aufgabe, die ebenfalls ökonomischer Natur ist. Sie hat die complicirteren Thatsachen in möglichst wenige und möglichst einfache zu zerlegen. Dies nennen wir erklären. Diese einfachsten Thatsachen, auf die wir die complicirteren zurückführen, sind an sich immer unverständlich, d. h. nicht weiter zerlegbar, z. B. die, dass eine Masse der andern eine Acceleration ertheilt.

Es ist nun wieder nur eine ökonomische Frage einerseits und eine Frage des Geschmackes anderseits, bei welchen Unverständlichkeiten man stehn bleiben will. Man täuscht sich gewöhnlich darin, dass man meint, Unverständliches auf Verständliches zurückzuführen. Allein das Verstehn besteht eben im Zerlegen. Man führt ungewöhnliche Unverständlichkeiten auf gewöhnliche Unverständlichkeiten zurück. Man gelangt schliesslich immer zu Sätzen von der Form, wenn A ist, ist

B, also Sätzen, die aus der Anschauung folgen müssen, die also nicht weiter verständlich sind.

. Die Newton'sche Gravitationstheorie beunruhigte bei ihrem Auftreten fast alle Naturforscher, weil sie sich auf eine ungewöhnliche Unverständlichkeit gründete. Man trachtete die Gravitation auf Druck und Stoss zurückzuführen. Heute beunruhigt die Gravitation keinen Menschen mehr. Sie ist eine gewöhnliche Unverständlichkeit geworden.

E. MACH.

„Die Geschichte und die Wurzel des Satzes
von der Erhaltung der Arbeit“, Votr. Böhm. Ges. d.
Wiss. 15. XI. 1871 (Prag 1872), p. 31/32.

Warum fragt niemand nach dem Wesen des Goldes oder nach dem Wesen der Geschwindigkeit? Mit den Zeichen „Geschwindigkeit“ und „Gold“ verbinden wir eine grosse Zahl von Beziehungen zu anderen Zeichen, und zwischen allen diesen Beziehungen finden sich keine uns verletzenden Widersprüche. Auf die Zeichen „Kraft“ und „Elektricität“ aber hat man mehr Beziehungen gehäuft, als sich völlig mit einander vertragen; dies fühlen wir dunkel, verlangen nach Aufklärung und äussern unsern unklaren Wunsch in der unklaren Frage nach dem Wesen von Kraft und Elektricität.

HEINRICH HERTZ.

„Die Prinzipien der Mechanik“ (1894), p. 9.

Es ist äusserst wahrscheinlich, dass es mit der Fernkraft eine ähnliche Bewandtnis wie mit den angeführten Beispielen [algebr. Aufl. der Gleichungen des 5^{ten} und höherer Grade; Quadratur des Kreises; Perpetuum mobile] hat, um so mehr, als ein Kennzeichnendes für die Unlösbarkeit eines Problems die schliesslich ganz verzweifelten Anstrengungen der Forschung, die geradezu extravaganten Hilfsmittel sind, zu denen sie ihre Zuflucht nimmt, wohin Lesage's Kastenatome und Zöllner's durch Lust und Unlust bewegte Atome gehören. Steht es erst so um ein Problem, dann liegt ausreichender Grund zu der

Vermutung vor, dass es mit Hilfsmitteln, die unserem gemeinen Verstande angemessen sind, sich nicht werde lösen lassen. So glaube ich denn, dass man die Schwerkraft als etwas menschlich Unfassbares, etwas mechanisch Unbegreifliches ansehen muss, und ich will versuchen, dies zu beweisen. — — — —

Fernkraft und Materie sind Eins.

PAUL DU BOIS-REYMOND.

„Über die Grundlagen der Erkenntnis in den exacten Wissenschaften“ (Tübingen 1890), p. 35/36 u. 103;
s. a. Naturwiss. Rundschau 3 (1888), p. 171.

Gegenüber den Räthseln der Körperwelt ist der Naturforscher längst gewöhnt, mit männlicher Entsagung sein „Ignoramus“ auszusprechen. Im Rückblick auf die durchlaufene siegreiche Bahn trägt ihn dabei das stille Bewusstsein, dass, wo er jetzt nicht weiss, er wenigstens unter Umständen wissen könnte, und dereinst vielleicht wissen wird. Gegenüber dem Räthsel aber, was Materie und Kraft seien, und wie sie zu denken vermögen, muss er ein für allemal zu dem viel schwerer abzugebenden Wahrspruch sich entschliessen:

„Ignorabimus.“

EMIL DU BOIS-REYMOND.

„Über die Grenzen des Naturerkennens“,
Vortr. Naturf.-Vers. Leipzig 1872.
s. E. du Bois-Reymond, Reden, Bd. 1 (1886), p. 130.

Geheimnissvoll am lichten Tag
Lässt sich Natur des Schleiers nicht berauben,
Und was sie deinem Geist nicht offenbaren mag,
Das zwingst du ihr nicht ab mit Hebeln und mit Schrauben.

GOETHE.

„Faust“, Teil I, 672—675.
s. Werke, Grosse Weimarische Ausg.,
Abth. I, Bd. 14 (1887), p. 39.

Eine falsche Hypothese ist besser als gar keine.

GOETHE.

„Analyse und Synthese.“

s. Werke, Grosse Weimарische Ausg., Abth. II, Bd. 11 (1893), p. 70.

= Goedeke'sche 10-bändige Ausg., Bd. 9, p. 715.

Hypotheses non fingo.

I. NEWTON.

„Principia mathematica philosophiae naturalis“
(Amsterdam 1714), liber III, scholium generale, p. 484.

Wir beobachten eine stetige Thätigkeit unserer Seele. Jedem Act derselben liegt etwas Bleibendes zu Grunde, welches sich bei besonderen Anlässen (durch die Erinnerung) als solches kundgiebt, ohne einen dauernden Einfluss auf die Erscheinungen auszuüben.

Von dieser Thatsache geleitet, mache ich die Hypothese, dass der Weltraum mit einem Stoff erfüllt ist, welcher während in die ponderablen Atome strömt und dort aus der Erscheinungswelt (Körperwelt) verschwindet.

Beide Hypothesen lassen sich durch die Eine ersetzen, dass in allen ponderablen Atomen beständig Stoff aus der Körperwelt in die Geisteswelt eintritt. Die Ursache, weshalb der Stoff dort verschwindet, ist zu suchen in der unmittelbar vorher dort gebildeten Geistessubstanz, und die ponderablen Körper sind hiernach der Ort, wo die Geisteswelt in die Körperwelt eingreift.*

* In jedes ponderable Atom tritt in jedem Augenblick eine bestimmte, der Gravitationskraft proportionale Stoffmenge ein und verschwindet dort.

Es ist die Consequenz der auf Herbart'schem Boden stehenden Psychologie, dass nicht der Seele, sondern jeder einzelnen in uns gebildeten Vorstellung Substantialität zukomme.

B. RIEMANN.

Fragment über „Neue mathem. Principien d. Naturphilosophie“.
s. Werke, herausg. v. H. Weber, 2. Aufl. (1892), p. 528/529.

Hypotheses . ., in Philosophia quae circa experimenta versatur, pro nihilo sunt habendae.

I. NEWTON.

„Optice“, latine redd. S. Clarke (1740), Quest. XXXI, p. 329.

Witzige Einfälle verschaffen ihrem Autor bald den Namen eines geistreichen Mannes. Unter einer grossen Zahl solcher Einfälle werden ja auch wohl einige sein müssen, die sich schliesslich als halb oder ganz richtig erweisen; es wäre ja geradezu ein Kunststück, immer falsch zu rathen. In solchem Glücksfalle kann man seine Priorität auf die Entdeckung laut geltend machen; wenn nicht, so bedeckt glückliche Vergessenheit die gemachten Fehlschlüsse. Andere Anhänger desselben Verfahrens helfen gern dazu, den Werth eines „ersten Gedankens“ zu sichern. Die gewissenhaften Arbeiter, welche ihre Gedanken zu Markte zu bringen sich scheuen, ehe sie sie nicht nach allen Seiten geprüft, alle Bedenken erledigt und den Beweis vollkommen gefestigt haben, kommen dabei in unverkennbaren Nachtheil. Die jetzige Art, Prioritätsfragen nur nach dem Datum der ersten Veröffentlichung zu entscheiden, ohne dabei die Reife der Arbeit zu beachten, hat dieses Unwesen sehr begünstigt.

In den Letterkästen eines Buchdruckers liegt alle Weisheit der Welt zusammen, die schon gefunden ist und noch gefunden werden kann; man müsste nur wissen, wie man die Lettern zusammenzuordnen hat¹⁾. So sind auch in den Hunderten von Schriften und Schriftchen, die alljährlich erscheinen über Aether, Beschaffenheit der Atome, Theorie der Wahrnehmung, ebenso wie über das Wesen der asthenischen Fieber und der Carcinome, gewiss schon längst alle zartesten Nüancirungen der möglichen Hypothesen erschöpft und unter diesen müssen noth-

¹⁾ Dies Bild vom umgestürzten Schriftkasten kommt nach E. du Bois-Reymond, „Culturgeschichte und Naturwissenschaft“, Vortr. Köln 24. III. 1877, seltsamerweise schon bei den Alten vor (s. das Nähere in du Bois' „Reden“, Bd. 1 (1886), p. 254).

wendig viele Bruchstücke der richtigen Theorie sein. Wer sie nur zu finden wüsste!

HELMHOLTZ.

„Das Denken in der Medizin“, Festrede
Berlin militäirärztl. Bildungs-Anst. 2. VIII. 1877.
s. Vorträge u. Reden, Bd. 2 (1884), p. 185.

De simples vues, quelque grandes, quelque heureuses qu'elles soient, ne peuvent, ni être mises sur la même ligne qu'une découverte précise et bien prononcée, ni diminuer le mérite de celle dont elles ont été le germe.

CONDORCET.

Oeuvres, Édition d'Arago, t. 2 (1847), p. 6/7.

Im Allgemeinen würde ich gegen . . . Phantasiespiele nachsichtig sein, und ihnen nur die Aufnahme in die wissenschaftliche Astronomie, die einen ganz andern Character haben muss, nicht einräumen. Gehören doch auch Laplace's Cosmogonische Hypothesen in jene Classe. Ja, ich leugne nicht, dass ich selbst mich zuweilen auf ähnliche Art amüsire, nur würde ich dergleichen nie publiciren. Es gehören dahin z. B. meine Gedanken über die Bewohner der Himmelskörper. Ich meinerseits bin (gegen die gewöhnliche Meinung) überzeugt (was man in solchen Dingen Überzeugung nennt), dass, je grösser die Weltkörper, desto kleiner die Bewohner und sonstige Producte. Z. B. auf der Sonne würden Bäume, die in demselben Verhältniss grösser wären als die unsrigen, wie die Sonne die Erde an Grösse übertrifft, gar nicht existiren können, denn wegen der so viel grössern Schwere auf der Oberfläche der Sonne würden alle Zweige von selbst abbrechen, insofern die Stoffe nicht ganz heterogener Art mit irdischen sind. — — —

GAUSS an Schumacher

Göttingen, 7. XI. 1847.

s. Briefw. Gauss-Schumacher, Bd. 5 (1863), p. 394.

Gauss hielt es für möglich, mit Hilfe von Heliotropen eine telegraphische Correspondenz zwischen Mond und Erde zu errichten und hatte in Bezug auf diese Frage sogar die Grösse der erforderlichen Spiegel berechnet, woraus sich ergab, dass eine solche Correspondenz eventuel ohne grosse Kosten sich würde einrichten lassen. Das wäre eine Entdeckung, pflegte er zu sagen, noch grösser als die von Amerika, wenn wir uns mit unseren Mondnachbarn in Verbindung setzen könnten — hielt es jedoch nicht eben für wahrscheinlich, dass der Mond eine mit höherer Intelligenz ausgestattete Bevölkerung besitze.

F. A. T. WINNEKCE.

„Gauss“ (Braunschweig 1877), p. 25/26.

Un savant doit rejeter, sans hésiter, toute hypothèse qui serait en contradiction avec les vérités révélées. Ce point est capital, je ne dirai pas dans l'intérêt de la religion, mais dans l'intérêt des sciences, puisque jamais la vérité ne saurait se contredire elle-même. C'est pour avoir négligé cette règle, que quelques savants ont eu le malheur de consumer en vains efforts un temps précieux qui aurait pu être heureusement employé à faire d'utiles découvertes. Et en effet, que de travaux remarquables eussent pu être ajoutés aux importants mémoires compris dans nos recueils scientifiques, si la religion eût toujours guidé la plume de ces auteurs qui ont cru pendant quelque temps avoir découvert que les zodiaques de Denderah et d'Esneh avaient douze mille ans de date, que l'homme descendait du polype, qu'il avait existé sur la terre de toute éternité, que le déluge était une fable, que la création de l'homme et des animaux était un effet du hasard, et que de nos jours encore on les voyait sortir de terre dans les îles du grand Océan, que les Américains formaient une espèce d'hommes distincte de la nôtre, etc. — — —

AUGUSTIN CAUCHY.

„Sept leçons de physique générale“, Turin 1833, avec appendices par l'abbé Moigno (Paris 1868), p. 16.

E Scriptura quidem via ad salutem, non verò ad Mathematica, discenda.

O. v. GUERICKE.

„Experimenta nova de vacuo spatio“ (Amsterdam 1672), liber VI, caput XVI, p. 218.

Die Wissenschaft in den einzelnen Erscheinungsgebieten verfährt mit äusserster Rücksichtslosigkeit gegen die übrigen Erscheinungsgebiete. Es ist ein durchgehender Zug, dass sie mit jedem ihrer Elementarmechanismen nur ein bestimmtes Erscheinungsgebiet zu construiren trachtet, völlig unbekümmert darum, ob dieser Mechanismus anderweit noch verwertbar ist. Dies geht soweit, dass die Erscheinungen eines Gebietes in ihrem verschiedenartigen Auftreten zuweilen mit verschiedenen Ausgangsvorstellungen in Verbindung gebracht werden, wie denn z. B. der Wärmestoff noch in der Lehre von der Wärmeleitung in Gebrauch ist, während die kinetische Gastheorie ihn in die lebendige Kraft der bewegten Gasteilchen verlegt und die Wärmestrahlung in die des schwingenden Aethers. — — — —

Wenn auch directer Widerspruch (wie z. B. continuirliche Raumauffüllung und chemische Molekel) als Monstrosität anzusehen ist, so ist doch im allgemeinen dies Vorgehen der Wissenschaft ein durchaus richtiges.

PAUL DU BOIS-REYMOND.

„Über die Grundlagen der Erkenntnis in den exacten Wissenschaften“ (Tübingen 1890), p. 17/18.

Für die Unterwerfung eines neuen Gebietes unter die Theorie ist in vielen Fällen das Ausgehen von ganz bestimmten Vorstellungen über den Mechanismus des Vorganges nützlich gewesen. Ein Beispiel hierfür liefert die zur Erklärung der Cohäsionserscheinungen gemachte Annahme, dass die Körper aus discreten Molekülen bestehen, welche fernwirkende Kräfte auf einander ausüben; ein anderes die für die Electricitätstheorie so fruchtbare Hypothese, dass es Fluida von sehr ge-

ringer Dichte giebt, die sich durch ausgeübte Kräfte innerhalb der ponderablen Körper bewegen lassen.

Es ist offenbar tief in der Organisation unseres Geistes begründet, dass die Benutzung solcher anschaulicher Bilder der uns ihrem Wesen nach unbekannten Vorgänge das Auffinden ihrer Gesetze erleichtert.

W. VOIGT.

Göttinger Nachr. 1895, Math.-phys. Kl., p. 259.

Meine Begriffe über das Theoretisiren in den Erfahrungswissenschaften sind die folgenden: Wer eine Theorie aufstellen will, muss sie auf alle damit in Bezug stehenden Thatsachen prüfen, ohne Vorurtheil zu Gunsten dieser Theorie, muss gleich offen ihre schwachen, wie ihre guten Seiten hervorheben. Er muss nie versuchen, Überzeugung hervorzubringen, wo nur Wahrscheinlichkeit ist; denn wer Probabilitäten als Wahrheit giebt, der wird, mit oder ohne Willen, ein Irreführer. Jeder Theoretiker muss Newton's Grundsätzen in dieser Hinsicht folgen, durch welche dieser unübertroffene Naturforscher noch die höchste Stelle behauptet, obgleich nach ihm ein Jahrhundert gefolgt hat, in welchem mehr für die Naturwissenschaften gemacht worden ist, als in der ganzen Zeit vor ihm.

JAC. BERZELIUS an J. Liebig.

Stockholm, 14. XI. 1843.

s. „Berzelius und Liebig, ihre Briefe von 1831—1845“, herausg. von J. Carrière (München u. Leipzig 1893), p. 251.

Hatte einst Napoleon in der Kapuzinergruft zu Wien gerufen: „Alles ist eitel mit Ausnahme der Kraft“, so strich jetzt Kirchhoff auf einer Druckseite die Kraft aus der Natur, jenen deutschen Professor beschämend, von dem Karl Moor¹⁾ erzählt, dass er sich vermass, trotz seiner Schwäche auf seinem Katheder das Wesen der Kraft zu behandeln, aber doch nicht diese zu vernichten.

¹⁾ Schiller, „Räuber“, 1. Akt, 2. Scene.

Kirchhoff hat selbst das Wort Kraft später wieder eingeführt, aber nicht als metaphysischen Begriff, sondern bloss als abgekürzte Bezeichnung für gewisse algebraische Ausdrücke, welche bei der Beschreibung der Bewegung beständig vorkommen. — — — —

Kirchhoff hatte an der alten classischen Mechanik keine materielle Änderung vorgenommen; seine Reformation war eine rein formale. Viel weiter ging Hertz, und während fast alle späteren Autoren die Darstellungsweise Kirchhoff's nachahmten, hie und da freilich oft mehr gewisse, bei Kirchhoff stehende Ausdrucksweisen als dessen Geist, so habe ich Hertz's Mechanik zwar sehr oft preisen gehört, aber noch niemanden sah ich auf dem von Hertz gewiesenen Weg weiterwandeln.

L. BOLTZMANN.

„Über die Entwicklung der Methoden der theoretischen Physik in neuerer Zeit“, Votr. Naturf.-Vers. München 1899.
s. Deutsche Mathem.-Verein. Jahresber. 8, 1899, p. 82/83.

Die Mechanik ist die Wissenschaft von der Bewegung; als ihre Aufgabe bezeichnen wir: die in der Natur vor sich gehenden Bewegungen vollständig und auf die einfachste Weise zu beschreiben.¹⁾

G. KIRCHHOFF.

„Vorlesungen über Mathem. Physik“,
Bd. 1 (Mechanik), (1876), p. 1.

Das Kirchhoff'sche Wort, dass die Mechanik bloss beschreibt, ist im Übermass nachgesprochen worden. In gewissem Sinn ist freilich jedes Erklären ein Beschreiben, aber doch zugleich von dem rein äusserlichen Beschreiben grundverschieden, und es dürfte sich wohl lohnen, dafür das unterscheidende Wort beizubehalten.

O. HÖLDER.

„Anschauung und Denken in der Geometrie“ (Leipzig 1900), p. 71.

¹⁾ Über verwandte Anschauungen und Aussprüche früherer Forscher, vor allem Adam Smith's und J. R. Mayer's, s. E. Mach, „Populärwissenschaftliche Vorlesungen“, 3. Aufl. (Leipzig 1903), p. 263 Anm.

Dass Kirchhoff selbst nichts anderes beabsichtigte, als dem Ausdruck „Erklärung“ entgegenzutreten, schliesst der Verfasser aus einer Unterhaltung mit ihm aus der Mitte der 70er Jahre. Es handelte sich um das Weber'sche Gesetz, und der Verfasser bemerkte: es sei schade, dass man sich dabei nichts denken könne, worauf Kirchhoff erwiderte: das sei ja ganz gleichgültig, wenn es nur gelinge, damit die Erscheinungen „darzustellen“. Dies war sein wörtlicher Ausdruck. — — —

PAUL DU BOIS-REYMOND.

„Über die Grundlagen der Erkenntnis in den exacten Wissenschaften“ (Tübingen 1890), p. 15.

In order to obtain physical ideas without adopting a physical theory we must make ourselves familiar with the existence of physical analogies. By a physical analogy I mean that partial similarity between the laws of one science and those of another which makes each of them illustrate the other. Thus all the mathematical sciences are founded on relations between physical laws and laws of numbers, so that the aim of exact science is to reduce the problems of nature to the determination of quantities by operations with numbers.

JAMES CLERK MAXWELL.

„On Faraday's Lines of Force“.
cf. Scientific Papers, vol. 1 (1890), p. 156.

Dem Ausdruck Hrn. v. Helmholtz', dass die Erscheinungen Zeichen des Wirklichen seien¹⁾, möchte ich den inhaltloseren Ausdruck Zuordnungen vorziehen, da man in der Darstellung dieser zarten Verhältnisse nicht wählerisch genug in den Bezeichnungen sein kann.

PAUL DU BOIS-REYMOND.

„Über die Grundlagen der Erkenntnis in den exacten Wissenschaften“ (Tübingen 1890), p. 121/122.

¹⁾ s. die Rede über „die Thatsachen in der Wahrnehmung“, Berlin Univ. 3. VIII. 1878 in Helmholtz, „Vorträge u. Reden“, Bd. 2 (1884), p. 226.

Wann ist unsere Auffassung der Welt wahr?

„Wenn der Zusammenhang unserer Vorstellungen dem Zusammenhange der Dinge entspricht.“

Die Elemente unseres Bildes von der Welt sind von den entsprechenden Elementen des abgebildeten Realen gänzlich verschieden. Sie sind etwas in uns; die Elemente des Realen etwas ausser uns. Aber die Verbindungen zwischen den Elementen im Bilde und im Abgebildeten müssen übereinstimmen, wenn das Bild wahr sein soll.

B. RIEMANN.

Fragment über „Neue mathem. Principien der Naturphilosophie.“
s. Werke, herausg. v. H. Weber, 2. Aufl. (1892), p. 523.

Wir machen uns innere Scheinbilder oder Symbole der äusseren Gegenstände, und zwar machen wir sie von solcher Art, dass die denknotwendigen Folgen der Bilder stets wieder die Bilder seien von den naturnotwendigen Folgen der abgebildeten Gegenstände.

HEINRICH HERTZ.

„Die Principien der Mechanik“ (1894), p. 1.

Zahlreiche Fragen, die früher unergründlich erschienen, entfallen hiermit von selbst. Wie kann, sagte man früher, von einem materiellen Punkte, der ein blosses Gedankending ist, eine Kraft ausgehen, wie können Punkte zusammen Ausgedehntes liefern etc.? Jetzt weiss man, dass sowohl die materiellen Punkte, als auch die Kräfte bloss geistige Bilder sind. Erstere können nicht Ausgedehntem gleich sein, aber es mit beliebiger Annäherung abbilden. Die Frage, ob die Materie atomistisch zusammengesetzt oder ein Continuum ist, reducirt sich auf die viel klarere, ob die Vorstellung enorm vieler Einzel-

wesen oder die eines Continuum's ein besseres Bild der Erscheinungen zu liefern vermöge.

L. BOLTZMANN.

„Über die Entwicklung der Methoden der theoretischen Physik in neuerer Zeit“, Vortrag Naturf.-Vers. München 1899.

s. Deutsche Mathem.-Verein. Jahresber. 8, 1899, p. 85.

Hertz hat versucht, in den Principien der Mechanik eine consequent durchgeführte Darstellung eines vollständig in sich zusammenhängenden Systems der Mechanik zu geben und alle einzelnen besonderen Gesetze dieser Wissenschaft aus einem einzigen Grundgesetz abzuleiten, welches logisch genommen natürlich nur als eine plausible Annahme betrachtet werden kann. — — — — —

Freilich werden noch grosse Schwierigkeiten zu überwinden sein bei dem Bestreben, aus den von Hertz entwickelten Grundlagen Erklärungen für die einzelnen Abschnitte der Physik zu geben. Im ganzen Zusammenhange aber ist die Darstellung der Grundgesetze der Mechanik von Hertz ein Buch, welches im höchsten Grade jeden Leser interessieren muss, der an einem folgerichtigen System der Dynamik, dargelegt in höchst vollendeter und geistreicher mathematischer Fassung, Freude hat. Möglicherweise wird dieses Buch in der Zukunft noch von hohem heuristischen Wert sein als Leitfaden zur Entdeckung neuer allgemeiner Charaktere der Naturkräfte.

H. VON HELMHOLTZ.

Vorrede zu Heinrich Hertz, Ges. Werke, Bd. 3 (1894), p. XIX u. XXII

= Zeitschr. phys. chem. Unterr. 8, 1894/95, p. 28 u. 29.

Nachdem durch Routh und v. Helmholtz die verborgenen Massen in die physikalische Mechanik eingeführt wurden, hat Hertz den kühnen Versuch unternommen die mechanischen Principien im Sinne dieser modernen Anschauungen mit Zugrundelegung des Princip's der Erhaltung der Energie unter der Annahme „vollständiger“ Systeme in ein abgeschlossenes System zu bringen.

... Für die technische Mechanik ist eine nutzbringende Anwendung dieser — an und für sich ganz berechtigten — Anschauungen vorläufig aussichtslos, obwohl sie in gewissem Sinne das Ideal eines Systems der physikalischen Mechanik verwirklicht haben.

K. HEUN.

„Die kinetischen Probleme der wissenschaftlichen Technik“,
Deutsche Mathem.-Verein. Jahresber. 9, 1900, p. 3.

Mit Recht weist Hertz darauf hin, dass in der Mechanik nicht die wenigen Experimente, aus denen gewöhnlich deren Grundgleichungen gewonnen werden, dass in der Elektrodynamik nicht die fünf oder sechs Fundamentalversuche Ampère's es sind, was uns von der Richtigkeit aller dieser Gleichungen so fest überzeugt, sondern vielmehr ihre nachherige Übereinstimmung mit allen bisher bekannten Thatsachen. Er fällt daher das salomonische Urteil, es sei das beste, nachdem man diese Gleichungen einmal habe, sie ohne jede Ableitung hinzuschreiben, dann mit den Erscheinungen zu vergleichen und in ihrer steten Übereinstimmung mit denselben den besten Beweis ihrer Richtigkeit zu erblicken.

Die Ansicht, deren Extrem hiermit ausgesprochen ist, fand die verschiedenste Aufnahme. Während die einen fast geneigt waren, sie für einen schlechten Witz zu halten, schien es anderen von nun an als einziges Ziel der Physik, ohne jede Hypothese, ohne jede Veranschaulichung oder mechanische Erläuterung für jede Reihe von Vorgängen Gleichungen aufzuschreiben, aus denen ihr Verlauf quantitativ berechnet werden kann, so dass die alleinige Aufgabe der Physik darin bestünde, durch Probiren möglichst einfache Gleichungen zu finden, welche gewisse notwendige formale Bedingungen der Isotropie etc. erfüllen, und sie dann mit der Erfahrung zu vergleichen. Dies ist die extremste Richtung der Phaenomenologie, welche ich die mathematische nennen möchte, während die allgemeine Phaenomenologie jede Thatsachengruppe durch Aufzählung und naturgeschichtliche Schilderung aller dahin gehörigen Erscheinungen zu beschreiben sucht ohne Beschränkung der dazu dienlichen Mittel, aber unter Verzicht auf jede einheitliche Naturauffassung, auf jede mechanische Erläuterung oder sonstige

Begründung. Letztere ist charakterisirt durch den von Mach citirten Ausspruch, dass die Elektrizität nichts anderes ist, als die Summe aller Erfahrungen, welche wir auf diesem Gebiete schon gemacht haben und noch zu machen hoffen¹⁾. Beide stellen sich die Aufgabe, die Erscheinungen darzustellen, ohne über die Erfahrung hinauszugehen.

L. BOLTZMANN.

„Über die Entwicklung der Methoden der theoretischen Physik in neuerer Zeit“, Vortrag Naturf.-Vers. München 1899.
s. Deutsche Mathem.-Verein. Jahresber. 8, 1899, p. 89/90.

Das Studium von Analogieen, wie sie zwischen durchaus getrennten Gebieten der Physik auftreten, ist besonders seit den Untersuchungen von Maxwell zu einem wichtigen Instrument der Forschung geworden und hat, gerade in der abstracten Form, in welcher die Übereinstimmung in der analytischen Darstellung als Ausgangspunkt genommen ist, wesentlich dazu beigetragen, unsere heutige Auffassung der Beziehung physikalischer Vorgänge zu den correspondirenden mathematischen Formulierungen zu entwickeln. Sie steht im Gegensatz zu dem Glauben an die Möglichkeit einer uns zugänglichen absoluten Erklärung der Geschehnisse in der Natur, auf Grund philosophischer, wie rein mechanischer Vorstellungen und Hypothesen; einem Glauben, wie er uns zum Teil in mystischem Gewande bei den Gelehrten des vorigen Jahrhunderts, oder in rationalistischer Form bei den Encyclopädisten entgegentritt. — Bei Maxwell, später bei Kirchhoff und Hertz finden wir klar und schlicht die Anschauung vertreten, dass unsere Einsicht in physikalische Vorgänge nur eine relative, und wesentlich in der Aufstellung von Analogieen begründete ist, und dass insbesondere auch die mathematische Formulierung nur die Bedeutung einer zusammenfassenden Beschreibung besitzt.

W. DYCK.

„Über die wechselseitigen Beziehungen zwischen der reinen und der angewandten Mathematik“, Akadem. Festrede München 14. XI. 1896, p. 12/13.

¹⁾ Vgl. z. B. E. Mach, „Die Analyse d. Empfindungen“, 3. Aufl. (1902), p. 251.

Ce n'est pas que je prétende, avec un célèbre savant allemand,¹⁾ que la nature s'écrie toujours non! non! quand on veut soulever quelque coin de voile qui la recouvre.

ARAGO.

Oeuvres, t. 1 (1854) p. 401 = Werke, Bd. 1 (1854) p. 321.

In der neueren Mathematik spielt die Frage nach der Unmöglichkeit gewisser Lösungen eine hervorragende Rolle und wir nehmen so gewahr, dass alte schwierige Probleme wie der Beweis des Parallelenaxioms, die Quadratur des Kreises oder die Auflösung der Gleichungen 5^{ten} Grades durch Wurzelziehen, wenn auch in anderem als dem ursprünglich gemeinten Sinne, dennoch eine völlig befriedigende und strenge Lösung gefunden haben.

Diese merkwürdige Thatsache neben anderen philosophischen Gründen ist es wohl, welche in uns eine Überzeugung entstehen lässt, die jeder Mathematiker gewiss teilt, die aber bis jetzt wenigstens niemand durch Beweise gestützt hat — ich meine die Überzeugung, dass ein jedes bestimmte mathematische Problem einer strengen Erledigung notwendig fähig sein müsse, sei es, dass es gelingt, die Beantwortung der gestellten Frage zu geben, sei es, dass die Unmöglichkeit einer Lösung und damit die Notwendigkeit des Misslingens aller Versuche dargethan wird. — — — — —

Diese Überzeugung von der Lösbarkeit eines jeden mathematischen Problems ist uns ein kräftiger Ansporn während der Arbeit; wir hören in uns den steten Zuruf: Da ist das Problem, suche die Lösung. Du kannst sie durch reines Denken finden; denn in der Mathematik giebt es kein Ignorabimus²⁾

D. HILBERT.

„Mathematische Probleme“, Vortrag Mathem.-Congr. Paris 1900.
s. Göttinger Nachr., Math.-phys. Kl. 1900, p. 261/262
= Arch. Math. Phys. (3) 1 (1901), p. 51/52.

¹⁾ Chladni; s. Arago, Werke, Bd. 3, p. 26.

²⁾ s. S. 7 (Emil du Bois-Reymond).

On doit donner au problème une telle forme qu'il soit toujours possible de le résoudre, ce qu'on peut toujours faire d'un problème quelconque.

N. H. ABEL.

„Sur la résolution algébrique des équations“, (Mémoire posthume).
voir Oeuvres complètes, réd. par Holmboe (Christiania 1839),
t. 2, p. 185 = Oeuvres compl., édition de Sylow et Lie
(Christiania 1881), t. 2, p. 217.

Il est beau de voir ainsi la théorie . . . s'élever, par un enchaînement de vérités mathématiques, à tous les résultats habilement manifestés par le physicien qui fait parler les phénomènes. Telle doit être la véritable physique; telle, peut-être, par les efforts successifs des plus habiles géomètres, la verrons-nous quelque jour perfectionnée dans toutes ses branches principales.

DUPIN.

„Développements de Géométrie“ (Paris 1813), p. 120.

Die Behandlungsweise der mechanischen Probleme ist zu einem Vorbild für die Kunst geworden, an die Natur Fragen zu richten.

R. LIPSCHITZ.

„Bedeutung der theoretischen Mechanik“, Heft 244 der Virchow-Holtzendorff'schen Sammlung gemeinverst. wiss. Vortr. (1876), p. 3

On a déjà plusieurs Traités de Mécanique, mais le plan de celui-ci est entièrement neuf. Je me suis proposé de réduire la théorie de cette Science, et l'art de résoudre les problèmes qui s'y rapportent, à des formules générales, dont le simple développement donne toutes les équations nécessaires pour la solution de chaque problème. — — — — —

On ne trouvera point de Figures dans cet Ouvrage. Les méthodes que j'y expose ne demandent ni constructions, ni raisonnemens géométriques ou mécaniques, mais seulement des

opérations algébriques, assujéties à une marche régulière et uniforme. Ceux qui aiment l'Analyse, verront avec plaisir la Mécanique en devenir une nouvelle branche, et me sauront gré d'en avoir étendu ainsi le domaine.

LAGRANGE.

„Mécanique analytique“ (1811), Avertissement.
= Oeuvres de Lagrange, t. 11 (1888), p. XI/XII.

Le trait distinctif du génie de Lagrange consiste dans l'unité et la grandeur des vues. Il s'attachait en tout à une pensée simple, juste et très-élevée. Son principal ouvrage, la Mécanique analytique, pourrait être nommée la Mécanique philosophique; car il ramène toutes les lois de l'équilibre et du mouvement à un seul principe; et ce qui n'est pas moins admirable, il les soumet à une seule méthode de calcul dont il est lui-même l'inventeur. Toutes ses compositions mathématiques sont remarquables par une élégance singulière, par la symétrie des formes et la généralité des méthodes, et, si l'on peut parler ainsi, par la perfection du style analytique.

FOURIER.

„Éloge historique de M. le Marquis de Laplace.“
voir Mém. de l'Acad. des Sc. de Paris 10, 1831, Histoire, p. LXXXV.

L'illustre auteur [Lagrange] qui a voulu transformer la mécanique en une question de calcul, a sans doute rempli son objet avec toute la clarté et toute l'élégance qu'on en pouvait attendre. Mais si la véritable analyse brille quelque part dans la Mécanique analytique, j'oserai dire que c'est bien moins dans ces calculs que l'auteur range avec tant d'ordre et de symétrie, que dans ces lumineux rapprochements qu'il indique entre les méthodes, et surtout dans ces admirables préfaces qu'il a placées à la tête des différents livres de son ouvrage, où il examine et discute les principes fondamentaux de la science, et fait l'histoire instructive du mouvement de l'esprit humain dans cette suite délicate d'idées fines et de solutions ingénieuses

qui ont peu à peu formé la science de la Mécanique. C'est par là que ce bel ouvrage pourra servir aux progrès ultérieurs de l'esprit, en lui montrant la route qu'il a suivie, et qui est encore la route où il doit continuer de marcher. Car . . . gardons-nous de croire qu'une science soit faite quand on l'a réduite à des formules analytiques. Rien ne nous dispense d'étudier les choses en elles-mêmes, et de nous bien rendre compte des idées qui font l'objet de nos spéculations. N'oublions point que les résultats de nos calculs ont presque toujours besoin d'être vérifiés, d'un autre côté, par quelque raisonnement simple, ou par l'expérience. Que si le calcul seul peut quelquefois nous offrir une vérité nouvelle, il ne faut pas croire que, sur ce point même, l'esprit n'ait plus rien à faire: mais, au contraire, il faut songer que, cette vérité étant indépendante des méthodes ou des artifices qui ont pu nous y conduire, il existe certainement quelque démonstration simple qui pourrait la porter à l'évidence; ce qui doit être le grand objet et le dernier résultat de la science mathématique.

POINSON.

„Théorie nouvelle de la rotation des corps“, Journal de mathém. pures et appliquées 16 (1851), p. 88.

Bekanntlich verwandelt das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten die ganze Statik in eine mathematische Aufgabe, und durch D'Alemberts Princip für die Dynamik ist diese wiederum auf die Statik zurückgeführt. — — — — —

So sehr es in der Ordnung ist, dass bei der allmäligen Ausbildung der Wissenschaft und bei der Belehrung des Individuum das Leichtere dem Schwerern, das Einfachere dem Verwickelteren, das Besondere dem Allgemeinen vorangeht, so fordert doch der Geist, einmal auf dem höhern Standpunkte angelangt, den umgekehrten Gang, wobei die ganze Statik nur als ein ganz specieller Fall der Mechanik erscheine.

GAUSS.

„Über ein neues allgemeines Grundgesetz der Mechanik.“
s. Werke, Bd. 5 (1877), p. 25 u. 26.

Es gibt eine Wissenschaft, die Mechanik, deren Aufgabe es ist, die Bewegung von Körpern zu bestimmen, wenn die Ursachen, die diese bedingen, bekannt sind. — — — —

Die Mechanik ist mit der Geometrie nahe verwandt; beide Wissenschaften sind Anwendungen der reinen Mathematik; die Sätze beider stehen in Bezug auf ihre Sicherheit genau auf gleicher Stufe; mit demselben Rechte wie den geometrischen Sätzen ist auch den mechanischen absolute Gewissheit zuzusprechen.

G. KIRCHHOFF.

„Über das Ziel der Naturwissenschaften“,
Akad. Festrede Heidelberg 22. XI. 1865, p. 4/5.

Mechanica omnis a geometria ita distinguitur, ut quicquid accuratum sit ad geometriam referatur, quicquid minus accuratum ad mechanicam. Attamen errores non sunt artis, sed artificum.

ISAAC NEWTON.

„Principia mathem. philosophiae naturalis“,
Auctoris praefatio ad lectorem.

Durch die Untersuchungen über die Grundlagen der Geometrie wird uns die Aufgabe nahe gelegt, nach diesem Vorbilde diejenigen physikalischen Disciplinen axiomatisch zu behandeln, in denen schon heute die Mathematik eine hervorragende Rolle spielt; dies sind in erster Linie die Wahrscheinlichkeitsrechnung und die Mechanik.

D. HILBERT.

„Mathematische Probleme“, Vortrag Mathem.-Congr. Paris 1900.
s. Göttinger Nachr., Math.-phys. Kl. 1900, p. 272
= Arch. Math.-Phys. (3) 1 (1901), p. 62.

Vielleicht lässt sich in der Mechanik die Deduction nicht so rein darstellen wie in der Geometrie. Vielleicht benutzen wir in der Mechanik, die mehr stofflichen Inhalt hat, noch

ausser den Axiomen nebenher und unbewusster Weise gewisse Erfahrungsanalogien.

O. HÖLDER.

„Anschauung und Denken in der Geometrie“,
Antrittsvorles. Leipzig Univ. 1899 (Leipzig 1900), p. 22.

In England und Holland wird die Mechanik kurzweg als ein Teil der Physik angesehen. — — — — —
Auf dem Kontinent (mit Ausnahme Hollands) ist dagegen viel eher die Ansicht herrschend, dass die Mechanik als *mécanique ratio[n]nelle* ein Teil der Mathematik ist; denken Sie etwa an die grossen Meister Laplace und Lagrange! Auch haben niemals die Versuche gefehlt, die Grundsätze der Mechanik nach dem Muster der geometrischen Axiome als a priori gegeben festzustellen.

FELIX KLEIN.

„Über die Encyklopaedie der mathematischen Wissenschaften,
mit besonderer Rücksicht auf Band 4 derselben (Mechanik)“,
Vortr. Naturf.-Vers. Aachen 1900.
s. Physikalische Zeitschr. 2, 1900/1901, p. 93.

Ich komme immer mehr zu der Überzeugung, dass die Nothwendigkeit unserer Geometrie nicht bewiesen werden kann, wenigstens nicht vom **menschlichen** Verstande noch für den menschlichen Verstand. Vielleicht kommen wir in einem andern Leben zu andern Einsichten in das Wesen des Raums, die uns jetzt unerreichbar sind. Bis dahin müsste man die Geometrie nicht mit der Arithmetik, die rein a priori steht, sondern etwa mit der Mechanik in gleichen Rang setzen. — —

GAUSS an Olbers,

Göttingen, 28. IV. 1817.

s. Gauss, Werke, Bd. 8 (1900), p. 177

= „Wilhelm Olbers, Sein Leben und seine Werke“,
herausg. v. C. Schilling, Bd. 2 (1900), p. 651/652.

Der Mann, der noch einmal den elften Grundsatz des Euclides demonstirt, verdient allenfalls den Namen eines sinnreichen Mannes; aber zur Erweiterung der Wissenschaften wird er nichts beitragen, was er nicht ohne diese Erfindung auch hätte thun können. „Aber, sagen sie, es geschieht, den Zweifler zu widerlegen.“ Den widerlegt ihr wahrhaftig nicht; denn welches Argument in der Welt wird den Mann überzeugen können, der einmal Absurditäten glauben kann?

LICHTENBERG.

Ausgew. Schriften, Reclam-Bibl. Nr. 1286—1289, p. 52.

Es thut mir sehr leid, dass ich unsere ehemalige grössere Nähe nicht benutzt habe um mehr von Deinen Arbeiten über die ersten Gründe der Geometrie zu erfahren; ich würde mir gewiss dadurch manche vergebliche Mühe erspart haben u. ruhiger geworden sein, als jemand wie ich es sein kann so lange bei einem solchen Gegenstande noch so viel zu desideriren ist. Ich selbst bin in meinen Arbeiten darüber weit vorgerückt (wie wol mir meine andern ganz heterogenen Geschäfte wenig Zeit dazu lassen); allein der Weg den ich eingeschlagen habe, führt nicht so wol zu dem Ziele das man wünscht und welches Du erreicht zu haben versicherst, als vielmehr dahin, die Wahrheit der Geometrie zweifelhaft zu machen. Zwar bin ich auf manches gekommen, was bei den meisten schon für einen Beweis. geltend würde, aber was in meinen Augen sogut wie NICHTS beweiset. z. B. wenn man beweisen könnte dass ein geradlinigtes Dreieck möglich sei, dessen Inhalt grösser wäre als eine jede gegebne Fläche so bin ich im Stande die ganze Geometrie völlig streng zu beweisen. Die meisten würden nun wol jenes als ein Axiom gelten lassen; ich nicht; es wäre ja wol möglich, dass so entfernt man auch die drei Endpunkte des \triangle im Raume von einander annähme, doch der Inhalt immer unter (infra) einer gegebenen Grenze wäre. Dergleichen Sätze habe ich mehrere aber in keinem finde ich etwas Befriedigendes. Mach doch ja Deine Arbeit bald bekannt; gewiss

wirst Du dafür den Dank nicht zwar des grossen Publikums (worunter auch mancher gehört der für einen geschickten Math. gehalten wird) einern, denn ich überzeuge mich immer mehr, dass die Zahl wahrer Geometer äusserst gering ist und die meisten die Schwierigkeiten bei solchen Arbeiten weder beurtheilen noch selbst einmal sie verstehen können — aber gewiss den Dank aller derer deren Urtheil Dir allein wirklich schätzbar sein kann.

GAUSS an W. Bolyai.

Helmstedt, 16. XII. 1799.

s. „Briefw. zw. C. F. Gauss u. W. Bolyai“,
herausg. v. Schmidt u. Stäckel (1899), p. 36/37.

In der Theorie der Parallellinien sind wir jetzt noch nicht weiter als Euklides war. Das ist die partie honteuse der Mathematik, die früher oder später eine ganz andere Gestalt bekommen muss.

C. F. GAUSS.

„Ideen“ (Nachlass), 27. IV. 1813.

s. Gauss, Werke, Bd. 8 (1900), p. 166.

Es wird wenige Gegenstände im Gebiete der Mathematik geben, über welche so viel geschrieben wäre, wie über die Lücke im Anfange der Geometrie bei Begründung der Theorie der Parallel-Linien. Selten vergeht ein Jahr, wo nicht irgend ein neuer Versuch zum Vorschein käme, diese Lücke auszufüllen, ohne dass wir doch, wenn wir ehrlich und offen reden wollen, sagen könnten, dass wir im Wesentlichen irgend weiter gekommen wären, als Euklides vor 2000 Jahren war. Ein solches auf richtiges und unumwundenes Geständniss scheint uns der Würde der Wissenschaft angemessener, als das eitele Bemühen, die Lücke, die man nicht ausfüllen kann, durch ein unhaltbares Gewebe von Scheinbeweisen zu verbergen.

C. F. GAUSS.

Göttinger Gelehrte Anz. 1816, April 20

= Werke, Bd. 4 (1880), p. 364/365

= Werke, Bd. 8 (1900), p. 170/171;

vgl. a. a. letzterem Orte, p. 183.

Ich freue mich, dass Sie den Mut haben, Sich so auszudrücken, als wenn Sie die Möglichkeit, dass unsere Parallelen-theorie, mithin unsere ganze Geometrie, falsch wäre, anerkannten. Aber die Wespen, deren Nest Sie aufstören, werden Ihnen um den Kopf fliegen.

GAUSS an Gerling.

Göttingen, 25. VIII. 1818.

s. Gauss, Werke, Bd. 8 (1900), p. 179.

Meine Überzeugung, dass wir die Geometrie nicht vollständig a priori begründen können, ist womöglich noch fester geworden. Inzwischen werde ich wohl noch lange nicht dazu kommen, meine sehr ausgedehnten Untersuchungen darüber zur öffentlichen Bekanntmachung auszuarbeiten, und vielleicht wird diess auch bei meinen Lebzeiten nie geschehen, da ich das Geschrei der Boeoter scheue, wenn ich meine Ansicht ganz aussprechen wollte.

GAUSS an Bessel.

Göttingen, 27. I. 1829.

Ich würde sehr beklagen, wenn Sie Sich „durch das Geschrei der Boeoter“ abhalten liessen, Ihre geometrischen Ansichten aus einander zu setzen.

BESSEL an Gauss.

Königsberg, 10. II. 1829.

s. Gauss, Werke, Bd. 8 (1900), p. 201

= Briefw. Gauss-Bessel (1880), p. 490 u. 493.

. . . . aus Göttingen schrieb [nach Empfang der „Appendix“ von Joh. Bolyai] der Mathematische Riese, welcher aus erhabenen Thürmen, von den Sternen bis auf die tiefe Gründe mit gleichem Auge sieht; dass er überrascht war, gethan zu sehen, was er begonnen hat, um es unter seinen Papieren zu hinterlassen.

W. BOLYAI.

„Kurzer Grundriss eines Versuchs“ . . (Maros Vászárhely 1851), p. 44.

Wenn die Autorität von Gauss dahin gewirkt hat, die letzten logischen Grundlagen der Mathematik in der angegebenen Weise [nichteuclidische Geometrie] und auch bezüglich des Imaginären in einem mystischen Licht erscheinen zu lassen, so ist diese Thatsache aus der mit dem religiösen Aberglauben der Person gegatteten Beschränktheit ihres allgemeineren Denkens zu erklären.

EUGEN DÜHRING.

„Kritische Gesch. der allgem. Principien der Mechanik,“
2. umgearb. Aufl. (1877), p. 461.

Helmholtz fing an die a priorische Existenz der [geometrischen] Axiome in Zweifel zu ziehen und zwar nicht auf Grund abstracter mathematischer Betrachtungen, wie es zum Theil von Gauss und Riemann geschehen, sondern physiologisch-optische Untersuchungen hatten ihn veranlasst, über den Ursprung der allgemeinen Raumanschauung überhaupt nachzudenken, und sehr bald zur Überzeugung geführt, dass nur die Anschaulichkeit der Raumverhältnisse uns das als selbstverständlich voraussetzen lässt, was in Wahrheit eine besondere Eigenthümlichkeit unserer Aussenwelt ist, und wir dadurch die Axiome der Geometrie für durch transcendente Anschauung gegebene Sätze halten.

LEO KÖNIGSBERGER.

„Hermann von Helmholtz's Untersuchungen über die Grundlagen der Mathematik und Mechanik“ (Leipzig 1896), p. 4.

Die Quelle der vollkommen irrigen, in der Bolyaischen Theorie zum Ausdruck gebrachten geometrischen Anschauung scheint mir der unglückselige Satz zu sein, „dass zwei parallele Linien sich im Unendlichen schneiden“. Aus diesem Satze, den wohl auch diejenigen Mathematiker, denen er später in Fleisch und Blut übergegangen ist, bei seinem ersten Entgegentreten eben nur hinuntergewürgt haben, fliesst der Begriff

„des unendlich fernen Punktes einer Geraden.“ Dieser Begriff ist in sich widersprechend, denn die Existenz einzelner unendlich ferner Punkte ist mit dem Begriff der Unendlichkeit nicht verträglich. — — — — —

Nun ist aber der ganze eben erwähnte Satz einfach unwahr. Zwei parallele Linien schneiden sich nie und nirgends, sie haben einen constanten Abstand, der, wie weit man auch geht, sich nicht vermindert und folglich auch „im Unendlichen“ nicht gleich Null ist.

F. PIETZKER.

Besprechung von Frischauf, „Absolute Geometrie“ (1876),
Zeitschr. math. naturw. Unterr. 7 (1876), p. 470/471.

Eine missverständliche Auffassung der älteren Untersuchungen hat eine Polemik gegen dieselben hervorgerufen, die gegen Windmühlenflügel zu kämpfen scheint, umso mehr, wenn sich die Diskussion, freilich nicht ohne Schuld hervorragender Forscher, in das philosophische Gebiet verliert, das von jeher der Tummelplatz verschiedener Meinungen gewesen ist und immer bleiben wird.

F. SCHUR.

„Die Parallelenfrage im Lichte der modernen Geometrie“,
Paedag. Archiv 34 (1892), p. 546.

1. Es giebt nur einen einzigen Raum, in welchem alle Menschen leben und denken, und in welchem eine Klasse von Mathematikern nach eigenem Geschmack und eigener Willkür ihre besonderen Räume construirt hat und construirt. — — — —

2. Diejenigen Mathematiker, welche einen Raum durch reine Zahlen construiren, gleichen denjenigen Menschen, welche ihr Millionenvermögen im Traume construiren. — — — —

3. Diejenigen Geometer, welche die Definition der Parallelengeraden, das fünfte Postulat und den daraus folgenden Satz der Winkelsumme im geradlinigen Dreiecke fallen

lassen und synthetisch eine ebene Geometrie construiren wollen, die entsprechen genau, kann man sagen, denjenigen Arithmetikern, welche das Axiom der Gleichheit fallen lassen und ihre algebraischen Probleme nicht durch Gleichungen, sondern durch Ungleichungen auflösen wollen.

A. KARAGIANNIDES.

„Die Nichteuklidische Geometrie vom Alterthum bis zur Gegenwart“ (Berlin 1893), p. 43/44.

Von Seite des k. k. Unterrichtsministeriums wurden mir die Vorlesungen des Wintersemesters 1871/2 „Pangeometrie und Projectivität“ als zu schwierig beanstandet — trotz der an unseren Universitäten doch herrschenden Lehr- und Lernfreiheit. Selbstverständlich hatte ich diese auf einer schon unglaublichen Ignoranz beruhende Beanständigung in gebührender Weise zurückgewiesen. Der betreffende Herr Referent kann sich nun hinsichtlich der in dieser Schrift gegebenen Pangeometrie von der Richtigkeit meiner damaligen Entgegnung überzeugen. — —

J. FRISCHAUF.

„Absolute Geometrie nach Johann Bolyai“
(Leipzig 1872), p. VII, Anm.

Für speculative Betrachtungen war Schröter nicht geschaffen. Wie er unklare Empfindungen im Leben von sich wies, so verhielt er in der Wissenschaft sich ablehnend gegen Theorien, die sich der Anschauung entziehen [nichteuclidische und mehrdimensionale Geometrie].

R. STURM.

„Heinrich Schröter“, Deutsche Mathem.-Verein.
Jahresber. 2, 1891/1892, p. 37.

Wenn die gelehrte, unfruchtbare Theorie sich zu kühnem Fluge erhebt, da fliegt sie der wirklichen Welt aus den Augen, hinauf über die Wolken zu Abel und Riemann, wo die Theta-Funktionen verschwinden, wo der „spezielle“ Begriff

„Dimension“ durch den allgemeinen Begriff „Mannigfaltigkeit“ ersetzt wird und dann in einer Welt von 4 und mehr Mannigfaltigkeiten geturnt werden kann.

A. RIEDLER.

„Zur Frage der Ingenieur-Erziehung“,
Heft 126 der „Volkswirtsch. Zeitfragen“ (Berlin 1895), p. 22/23.

Obgleich es uns nicht möglich ist, eine vollständig anschauliche Vorstellung von Räumen zu gewinnen, die mehr als drei Dimensionen besitzen, sind wir doch im Stande, uns im Einzelnen diejenigen Erfahrungen auszumalen, welche wir machen würden, wenn wir in einem Raume von mehr als drei Dimensionen lebten und uns nach sämtlichen Dimensionen willkürlich bewegen könnten.

LUDWIG SCHEEFFER.
Doctorthese Berlin 1880.

Wir denken nicht Alles klingend und stellen uns die Molecularvorgänge nicht musikalisch, nicht in Tonhöhenverhältnissen vor, obgleich wir dazu gerade so berechtigt sind, wie dazu, uns dieselben räumlich zu denken.

. Es liegt keine Nothwendigkeit vor, sich das bloss Gedachte räumlich d. h. mit den Beziehungen des Sichtbaren und Tastbaren zu denken, ebensowenig als es nöthig ist, dasselbe in einer bestimmten Tonhöhe zu denken. — — — —

Zwischen n Punkten sind, wenn wir sie zu zweien combiniren $\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}$ Entfernungen denkbar, also im Allgemeinen mehr, als ein Raum von gegebener Dimensionszahl zu erfüllen vermag. — — — — —

Je grösser nun die Zahl der Atome in einem Molecüle ist, einer desto höheren Dimensionszahl des Raumes bedürfen wir dann, um alle denkbaren Möglichkeiten solcher Verbindungen auch zu verwirklichen. Dies ist nur ein Beispiel, welches zeigt, wie beschränkt wir verfahren, wenn wir uns die chemischen Elemente räumlich (nach 3 Dimensionen) nebeneinander ge-

lagert denken und wie eine Menge der Beziehungen der Elemente uns dadurch entgehen können, indem wir sie in einer Formel darstellen wollen, welche sie eben nicht zu fassen vermag.

E. MACH.

„Die Geschichte und die Wurzel des Satzes von der Erhaltung der Arbeit“, Vortr. Böhm. Gesch. d. Wiss. 15. XI. 1871 (Prag 1872), p. 27—29.

Die Geometrie der Alten . . . steht als ein scharf ausgeprägtes Gebilde vor unseren Augen. Jeder bewundert die Klarheit und Bestimmtheit ihrer Begriffe, die strenge Consequenz in deren Verbindung, die Einfachheit der Darstellung. Wer aber die griechische Mathematik aus ihren Quellen selbst studirt hat, dem werden auch ihre Mängel nicht verborgen geblieben sein: die Alten kennen nur den synthetisch fortschreitenden Entwicklungsgang vom Einzelnen zum Einzelnen, vom Einfachen zum Zusammengesetzten; — es fehlen ihnen allgemeine Principien und Methoden. So opfert die antike Geometrie zu Gunsten einer scheinbaren Einfachheit die wahre Einfachheit auf, welche in der Einheit der Principien beruht, und erreicht eine triviale sinnliche Anschaulichkeit auf Kosten der Erkenntnis vom Zusammenhang geometrischer Gestalten in allem Wechsel und in aller Veränderlichkeit ihrer sinnlich vorstellbaren Lage.

HERMANN HANKEL.

„Projektivische Geometrie“ (Leipzig 1875), p. 1/2.

Wir verlangen die Zurückführung jeder logischen Begründung auf eine anschauliche; die Mathematik hingegen, wie sie vom Eukleides als Wissenschaft aufgestellt und bis auf den heutigen Tag im Ganzen geblieben ist, ist mit grosser Mühe bestrebt, die ihr eigenthümliche, überall nahe, anschauliche Evidenz muthwillig zu verwerfen, um ihr eine logische zu substituiren. Wir müssen finden, dass dies ist, wie wenn Jemand sich die Beine abschnitte, um mit Krücken zu gehen,

oder wie wenn der Prinz, im „Triumph der Empfindsamkeit“,¹⁾ aus der wirklichen schönen Natur flieht, um sich an einer Theaterdekoration, die sie nachahmt, zu erfreuen. — — — —

Dass, was Eukleides demonstriert, alles so sei, muss man, durch den Satz vom Widerspruch gezwungen, zugeben: warum es aber so ist, erfährt man nicht. Man hat daher fast die unbehagliche Empfindung, wie nach einem Taschenspielerstreich, und in der That sind einem solchen die meisten Eukleidischen Beweise auffallend ähnlich. Fast immer kommt die Wahrheit durch die Hinterthür herein, indem sie sich per accidens aus irgend einem Nebenumstand ergibt. Oft schliesst ein apagogischer Beweis alle Thüren, eine nach der andern, zu, und lässt nur die eine offen, in die man nun bloss deswegen hinein muss. Oft werden, wie im Pythagorischen Lehrsatz, Linien gezogen, ohne dass man weiss warum: hinterher zeigt sich, dass es Schlingen waren, die sich unerwartet zuziehn Indessen verdient übrigens die Art, wie vom Eukleides dieses durchgesetzt ist, alle Bewunderung, die ihm so viele Jahrhunderte hindurch geworden ist. — — — — —

SCHOPENHAUER.

„Die Welt als Wille und Vorstellung“, Bd. 1, Buch I, § 15.
s. Werke, herausg. v. J. Frauenstädt, 2. Aufl., Bd. 2 (1888),
p. 82—84.

Der Euklidische Mausefallenbeweis des Pythagorischen Lehrsatzes.

SCHOPENHAUER.

„Über die vierf. Wurzel des Satzes vom zureichenden Grunde“,
Kap. VI, § 39.
s. Werke, herausg. v. J. Frauenstädt, 2. Aufl., Bd. 1 (1888), p. 139.

Nichts scheint mir zu beweisen, dass eine solche strenge, Schritt für Schritt fortschreitende Begründung, wie wir sie bei

¹⁾ Goethe, Werke, Grosse Weimarische Ausg., Bd. 17 (1894), p. 1—73.

den Griechen in so hohem Grade bewundern, in Indien ein gleiches Bedürfniss gewesen sei. Es kann vielmehr dem phantasiereichen Geiste des Orients angemessener erscheinen, dass Wahrheiten, welche der unmittelbaren Anschauung zugänglich sind, nicht weiter zergliedert und auf einfachere zurückgeführt werden. Während z. B. bei den Griechen die Proportionalität der Seiten in gleichwinkligen Dreiecken als das Resultat einer langen Reihe von Schlüssen sich darstellt, kann dieselbe Wahrheit im Orient als durch Anschauung gegeben und mithin keiner ferneren Zurückführung bedürftig betrachtet worden sein. Jedem Menschen, und hätte er sich auch nie mit mathematischen Reflexionen beschäftigt, leuchtet in der That ein, dass jede Figur in beliebigem Grade vergrössert oder verkleinert werden kann, ohne dass die daran vorkommenden Dimensionen ihre Verhältnisse verändern.

DIRICHLET „nach Chasles“.¹⁾

s. Werke, herausg. v. Kronecker, Bd. 2, p. 345.

Es ist eine tief eingewurzelte Gewohnheit vieler Geometer, Sätze zu formulieren, die „im allgemeinen“ gelten sollen, d. h. einen klaren Sinn überhaupt nicht haben, zudem noch häufig als allgemein gültig hingestellt, oder mangelhaft begründet werden. Dies Verfahren wird trotz etwanigen Verweisungen auf Träger berühmter Namen späteren Geschlechtern sicher als ganz unzulässig erscheinen, scheint aber in unserem kritischen Zeitalter von vielen als eine berechtigte Eigentümlichkeit der Geometrie betrachtet zu werden.

E. STUDY.

„Ein neuer Zweig der Geometrie,“

Deutsche Mathem.-Verein. Jahresber. 11 (1902), p. 100, Anm.

Allgemeinheit der Gesichtspunkte und Methoden, Präzision und Eleganz der Darstellung, sind seit Lagrange Gemeingut

¹⁾ Dirichlet hatte sich von Chasles einmal ein autographiertes Vorlesungsheft geliehen (s. G. Darboux, „Notice sur les travaux de M. Chasles“, Bull. des sc. mathém. et astron. (2) 4 (1880), p. 438).

aller derer geworden, die auf den Rang wissenschaftlicher Mathematiker Anspruch machen dürfen. Und, wenn auch jene Allgemeinheit, zuweilen auf Kosten der Anschaulichkeit und Brauchbarkeit übertrieben, zum Abstrusen führt, so dass allgemeine Sätze aufgestellt werden, die in keinem speziellen Falle gelten; wenn ferner jene Präzision zuweilen in eine gesuchte Kürze ausartet, welche eine Abhandlung schwieriger zu lesen macht, als sie zu schreiben war; wenn endlich auch jene Eleganz der Form in unseren Tagen fast zum Kriterium über den Wert oder Unwert eines Satzes geworden ist, — so sind doch alle diese Bedingungen für die gedeihliche Entwicklung dadurch von höchster Bedeutung, dass sie das wissenschaftliche Material in den Grenzen halten, die innerlich und äusserlich notwendig sind, wenn die Mathematik sich nicht in's Kleinliche zersplittern oder am Überfluss ersticken soll.

HERMANN HANKEL.

„Die Entwicklung der Mathematik in den letzten Jahrhunderten,“ Akad. Vortrag Tübingen 29. IV. 1869, 2. Aufl. (Tübingen 1884), p. 14/15.

Il semble que dans l'état actuel des sciences mathématiques le seul moyen d'empêcher que leur domaine ne devienne trop vaste pour notre intelligence, c'est de généraliser de plus en plus les théories que ces sciences embrassent, afin qu'un petit nombre de vérités générales et fécondes soit, dans la tête des hommes, l'expression abrégée de la plus grande variété de faits particuliers.

DUPIN.

„Développements de Géométrie“ (Paris 1813), IV^{me} mémoire, § III, p. 265.

Durch gehörige Aneignung der wenigen [geometrischen] Grundbeziehungen macht man sich zum Herrn des ganzen Gegenstandes; es tritt Ordnung in das Chaos [aller Sätze, womit uns die ältere und neuere Zeit so freigebig beschenkt hat] ein,

und man sieht, wie alle Theile naturgemäss in einander greifen, in schönster Ordnung sich in Reihen stellen, und verwandte zu wohlbegrenzten Gruppen sich vereinigen. Man gelangt auf diese Weise gleichsam in den Besitz der Elemente, von welchen die Natur ausgeht, um mit möglichster Sparsamkeit und auf die einfachste Weise den Figuren unzählig viele Eigenschaften verleihen zu können.

J. STEINER.

„Systemat. Entw. d. Abhäng. geometrischer Gestalten von einander“, Vorrede.

s. Werke, herausg. v. Weierstrass, Bd. 1 (1881), p. 233.

Die Ansicht, dass es bei der Wissenschaft hauptsächlich auf Bequemlichkeit und Ersparniss im Denken ankommt, verrete ich seit Beginn meiner Lehrthätigkeit. Die Physik mit ihren Formeln, mit ihrer Potentialfunction, ist besonders geeignet diese Ansicht klar zu stellen. Das Trägheitsmoment, das Centralellipsoid u. s. w. sind z. B. nichts wie Surrogate, durch die man mit Bequemlichkeit die Betrachtung der einzelnen Massenpunkte erspart. Besonders klar fand ich diese Ansicht auch bei meinem Freunde, dem Nationalökonom E. Herrmann. Von ihm habe ich den mir sehr passend scheinenden Ausdruck angenommen: „Die Wissenschaft hat eine ökonomische oder wirthschaftliche Aufgabe.“

E. MACH.

„Die Geschichte und die Wurzel des Satzes von der Erhaltung der Arbeit“, Votr. Böhm. Ges. d. Wiss.
15. XI. 1871 (Prag 1872), p. 55/56, Note 5.

Man könnte sich ja ein mathematisches — wenigstens ein geometrisches — Lehrgebäude denken, das auf den Begriff der absoluten oder unbegrenzten Genauigkeit verzichtete und seinen Sätzen nur eine angenäherte, also empirisch verifizierbare Form gäbe; etwa so: wenn in einem Dreieck zwei Seiten um nicht mehr als den 100. Teil ihrer Länge verschieden sind, unterscheiden sich die gegenüberliegenden Winkel höchstens um 3 Grad — vorausgesetzt, dass der eingeschlossene Winkel nicht

kleiner als 10 Grad ist. Aber das Beispiel zeigt schon, woran eine solche Einrichtung der Mathematik scheitert: an der Notwendigkeit von Zusätzen, wie der hier mit „vorausgesetzt, dass“ eingeführte, von denen die entsprechenden Sätze der idealen, genauen Mathematik frei sind. Wenn solche Zusätze schon bei so einfachen Sätzen, wie der eben genannte, erforderlich sind, so brauche ich nicht weiter auseinanderzusetzen, wie sie sich bei fortschreitendem Aufbau des Lehrgebäudes immer mehr häufen müssten, bis schliesslich die Sätze so lang würden, dass niemand mehr imstande wäre, den Anfang bis zum Ende im Gedächtnis zu behalten. Daher wird selbst der strengste Empirist, der die Gewinnung solcher der empirischen Verifikation zugänglichen Sätze als das eigentliche praktische Ergebnis der Mathematik ansehen möchte, dem Zugeständnis nicht ausweichen können: der ökonomischste Weg zu diesem Ziel führt über die Aufstellung absolut genauer Sätze, von denen aus man dann durch eine sogenannte Fehlerrechnung feststellt, welche Abweichungen man in den Voraussetzungen zulassen darf, wenn die Ungenauigkeit des Resultats eine vorgeschriebene Grenze nicht überschreiten soll.

H. BURKHARDT.

„Mathematisches und naturwissenschaftliches Denken,“ Antrittsvorl. Zürich Univ. 1897.

s. Münchener Allgem. Zeitg. Beilage 22. XI. 1897, Nr. 264, p. 2/3
= Deutsche Mathem.-Verein. Jahresber. 11 (1902), p. 53/54.

Die Araber verwendeten in der Mathematik ihr Nachdenken darauf, das Nachdenken entbehrlich zu machen. Das consequent durchgeführte dekadische Zahlensystem [.] die praktischen Regeln des Rechnens in den vier Species sind von ihnen hauptsächlich so gut schematisirt worden, dass sie jetzt mit dem besten Erfolge auf Dorfschulen gelehrt werden können.

KUMMER.

(„Über die Bedingungen, unter denen die Wissenschaften, insbesondere die mathematischen, gedeihen und sich zur Blüthe entfalten“), Festrede i. d. Berliner Akademie 22. III. 1866.

s. Berl. Monatsber. 1866, p. 182.

Am meisten ausgebildet ist die Gedankenökonomie in jener Wissenschaft, welche die höchste formelle Entwicklung erlangt hat, welche auch die Naturwissenschaft so häufig zur Hilfe heranzieht, in der Mathematik. So sonderbar es klingen mag, die Stärke der Mathematik beruht auf der Vermeidung aller unnötigen Gedanken, auf der grössten Sparsamkeit der Denkopoperationen. Schon die Ordnungszeichen, welche wir Zahlen nennen, bilden ein System von wunderbarer Einfachheit und Sparsamkeit. Wenn wir beim Multiplizieren einer mehrstelligen Zahl durch Benützung des Einmaleins die Resultate schon ausgeführter Zähloperationen verwenden, statt sie jedesmal zu wiederholen, wenn wir bei Gebrauch von Logarithmentafeln neu auszuführende Zähloperationen durch längst ausgeführte ersetzen und ersparen, wenn wir Determinanten verwenden, statt die Lösung eines Gleichungssystems immer von neuem zu beginnen, wenn wir neue Integralausdrücke in altbekannte zerlegen, so sehen wir hierin nur ein schwaches Abbild der geistigen Tätigkeit eines Lagrange oder Cauchy, der mit dem Scharfblick eines Feldherrn für neu auszuführende Operationen ganze Scharen schon ausgeführter eintreten lässt. Man wird keinen Widerspruch erheben, wenn wir sagen, die elementarste wie die höchste Mathematik sei ökonomisch geordnete, für den Gebrauch bereit liegende Zählerfahrung.

— — — — —

. . . Im einzelnen vermag die Wissenschaft uns nichts zu bieten, was nicht jeder in genügend langer Zeit auch ohne alle Methode finden könnte. Jede mathematische Aufgabe könnte durch direktes Zählen gelöst werden. — — — — —

Wer Mathematik treibt, den kann zuweilen das unbehagliche Gefühl überkommen, als ob seine Wissenschaft, ja sein Schreibstift, ihn selbst an Klugheit überträfe, ein Eindruck, dessen selbst der grösse Euler nach seinem Geständnisse sich nicht immer erwehren konnte. Eine gewisse Berechtigung hat dieses Gefühl, wenn wir bedenken, mit wie viel fremden oft vor Jahrhunderten gefassten Gedanken wir in geläufigster Weise operieren. Es ist teilweise wirklich eine fremde Intelligenz,

die uns in der Wissenschaft gegenübersteht. Mit der Erkenntnis dieses Sachverhaltes erlischt aber wieder das Mystische und Magische des Eindrucks, zumal wir jeden der fremden Gedanken, sobald wir nur wollen, nachzudenken vermögen.

E. MACH.

„Die ökonomische Natur der physikalischen Forschung“,
Vortrag Wien Akad. d. Wiss. 1882.

s. Mach, „Populär-wissensch. Vorles.“, 3. Aufl. (1903),
p. 224/225, 226, 225/226.

Durch die fortgesetzte Beschäftigung mit dem Unterrichte erweiterte sich, ohne dass ich es wusste und wollte, mein Streben nach wissenschaftlicher Einheit und Zusammenhang. Wie die in besonderen Abtheilungen verbundenen Sätze einer einzelnen mathematischen Disciplin, so, glaubte ich, müssten auch alle besonderen mathematischen Disciplinen auseinander hervorgehen; es schwebte mir die Idee der organischen Einheit aller Objekte der Mathematik vor, und ich glaubte damals, diese Einheit auf irgend einer Hochschule, wenn auch nicht als einen objektiv zu Stande gebrachten Lehrgegenstand, doch in der Form bestimmter Andeutungen zu finden.

JACOB STEINER

in einer Eingabe an das preuss. Cultusministerium 16. XII. 1826.
s. J. Lange, „Jacob Steiners Lebensjahre in Berlin“
(Berlin 1899), p. 19.

Es kann keine allumfassende geometrische Symbolik geben, wie sie Grassmann und Hamilton sich dachten.

Alles in Quaternionen zwingen zu wollen, ist zwecklos.

H. BURKHARDT.

„Über Vectoranalysis“, Deutsche Mathem.-Verein.
Jahresber. 5, 1896, p. 52.

Der wesentliche Vortheil, welcher durch Grassmann's Auffassung [der Geometrie] erreicht wurde, war der Form nach der, dass nun alle Grundsätze, welche Raumesanschauungen ausdrückten, gänzlich wegfielen, und somit der Anfang ein ebenso unmittelbarer wurde, wie der der Arithmetik; dem Inhalte nach aber der, dass die Beschränkung auf drei Dimensionen wegfiel. Erst hierdurch traten die Gesetze in ihrer Unmittelbarkeit und Allgemeinheit ans Licht und stellten sich in ihrem wesentlichen Zusammenhange dar, und manche Gesetzmässigkeit, die bei drei Dimensionen entweder noch gar nicht oder nur verdeckt vorhanden war, entfaltete sich nun bei dieser Verallgemeinerung in ihrer ganzen Klarheit.

F. JUNGHANS.

„Hermann Grassmann“, Zeitschr. Math. Phys. 23 (1878),
Hist.-literar. Abth., p. 70
= Zeitschr. math. naturw. Unterr. 9 (1878), p. 168.

In future times Tait will be best known for his work in the quaternion analysis. Had it not been for his expositions, developments and applications, Hamilton's invention would be today, in all probability, a mathematical curiosity; and there are those who think that, now Tait is gone, such will ere long be its fate. But I venture to think that Hamilton himself will prove the better prophet: for he wrote to Tait: „Could anything be simpler or more satisfactory? Don't you feel, as well as think, that we are on the right track, and shall be thanked hereafter? Never mind when.“

ALEXANDER MACFARLANE.

„Peter Guthrie Tait, his life and works“,
Bibl. math. (3) 4 (1903), p. 189.

In fact, with all my very high admiration for Gauss, I have some private reasons for believing, I might say knowing, that he did not anticipate the quaternions. In fact, if I don't forget the year, I met a

particular friend, and (as I was told) pupil of Gauss, Baron von Walter[s]hausen, . . . at the second Cambridge Meeting of the British Association in 1845, just after Herschel had spoken of my quaternions and your triple algebra, in his speech from the throne. The said Baron soon afterwards called on me here, . . . he informed me that his friend and (in one sense) master, Gauss, had long wished to frame a sort of triple algebra; but that his notion had been, that the third dimension of space was to be symbolically denoted by some new transcendental, as imaginary, with respect to $\sqrt{-1}$, as that was with respect to 1. Now you see, as I saw then, that this was in fundamental contradiction to my plan of treating all dimensions of space with absolute impartiality, no one more real than another.

W. R. HAMILTON to A. De Morgan.

Observatory (of Trinity College, Dublin), 6. I. 1852.
cf. Graves, „Life of Sir William Rowan Hamilton“,
Vol. III (1889), p. 311/312 = Vol. II (1885), p. 490.

Mit allen . . neuen Calculs verhält es sich so, dass man durch sie nichts leisten kann, was nicht auch ohne sie zu leisten wäre; der Vortheil ist aber der, dass wenn ein solcher Calcul dem innersten Wesen vielfach vorkommender Bedürfnisse correspondirt, jeder der sich ihn ganz angeeignet hat, auch ohne die gleichsam unbewussten Inspirationen des Genies, die niemand erzwingen kann, die dahin gehörigen Aufgaben lösen, ja selbst in so verwickelten Fällen gleichsam mechanisch lösen kann, wo ohne eine solche Hülfe auch das Genie ohnmächtig wird. So ist es mit der Erfindung der Buchstabenrechnung überhaupt; so mit der Differentialrechnung gewesen, so ist es auch (wenn auch in partielleren Sphaeren) mit Lagranges Variationsrechnung, mit meiner Congruenzenrechnung und mit Möbius [barycentrischem] Calcul. Es werden durch solche Conceptionen unzählige Aufgaben, die sonst vereinzelt stehen, und jedesmahl neue Efforts (kleinere oder grössere) des Er-

findungsgeistes erfordern, gleichsam zu einem organischen Reiche.

GAUSS an Schumacher.

Göttingen, 15. V. 1843.

s. Briefw. Gauss-Schumacher, Bd. 4 (1862), p. 148.

So wie niemand physisch bestehen könnte, wenn er die Blutbewegung, die Athmung, die Verdauung seines Körpers durch willkürliche, vorbedachte Handlungen einleiten und im Stande halten müsste, so könnte auch niemand intellectuell bestehen, wenn er genöthigt wäre, alles was ihm vorkommt zu beurtheilen, anstatt sich vielfach durch sein Vorurtheil leiten zu lassen. Das Vorurtheil ist eine Art Reflexbewegung im Gebiete der Intelligenz.

Auf Vorurtheilen, d. h. auf nicht jedesmal auf ihre Anwendbarkeit geprüften Gewohnheitsurtheilen, beruht ein guter Theil der Überlegungen und Handgriffe des Naturforschers, auf Vorurtheilen beruht die Mehrzahl der Handlungen der Gesellschaft. Mit dem plötzlichen Erlöschen aller Vorurtheile würde sie selbst sich rathlos auflösen. Und eine tiefe Kenntniss der Macht der intellectuellen Gewohnheit hat jener Fürst verrathen, der seine den rückständigen Sold ungestüm fördernde Leibgarde durch das übliche Commandowort zum Abzuge zwang, wohl wissend, dass sie diesem nicht widerstehen würde.

E. MACH.

„Über Umbildung und Anpassung im naturw. Denken.“

Rectoratsrede Prag Univ. 1883 (Wien 1884), p. 14/15

= „Populär-wissensch. Vorles.“, 3. Aufl. (Leipzig 1903), p. 259/260.

Es ist der Character der Mathematik der neueren Zeit (im Gegensatz gegen das Alterthum) dass durch unsere Zeichensprache und Namengebungen wir einen Hebel besitzen, wodurch die verwickeltsten Argumentationen auf einen gewissen Mechanismus reducirt werden. An Reichthum hat dadurch die Wissenschaft unendlich gewonnen, an Schönheit und Solidität aber

wie das Geschäft gewöhnlich betrieben wird, eben so sehr verloren. Wie oft wird jener Hebel eben nur mechanisch angewandt, obgleich die Befugniss dazu in den meisten Fällen gewisse stillschweigende Voraussetzungen implicirt.¹⁾ Ich fordere, man soll bei allem Gebrauch des Calculs, bei allen Begriffsverwendungen sich immer der ursprünglichen Bedingungen bewusst bleiben, und alle Producte des Mechanismus niemals über die klare Befugniss hinaus als Eigenthum betrachten. Der gewöhnliche Gang ist aber der, dass man für die Analysis einen Character der Allgemeinheit in Anspruch nimmt, und dem Andern der so herausgebrachte Resultate noch nicht für bewiesen anerkennt zumuthet, er solle das Gegentheil nachweisen. Diese Zumuthung darf man aber nur an den stellen, der seinerseits behauptet ein Resultat sei falsch, nicht aber dem, der ein Resultat nicht für bewiesen anerkennt, welches auf einem Mechanismus beruht, dessen ursprüngliche wesentliche Bedingungen in dem vorliegenden Fall gar nicht zutreffen. So ist es sehr oft mit Divergirenden Reihen. Reihen haben eine klare Bedeutung, wenn sie convergiren; diese Klarheit der Bedeutung fällt weg mit dieser Bedingung, und es ändert im Wesentlichen Nichts, ob man sich des Worts Summe oder Werth bedient. . . . Nehmen Sie meinetwegen statt obigen Gleichnisses einer Maschine das von Papiergeld. Es kann dies zu grossen Arbeiten vortheilhaft benutzt werden, aber solide ist der Gebrauch nur, wenn ich gewiss bin, es jeden Augenblick in klingende Münze umsetzen zu können.

GAUSS an Schumacher.]

Göttingen, 1. IX. 1850.

s. Briefw. Gauss-Schumacher, Bd. 6 (1865), p. 107/108.

Eine Reihe ist convergirend, wenn ihre Glieder in ihrer Folge nach einander immerfort kleiner werden. Die Summe der Glieder nähert sich alsdann immer mehr dem Werthe der

¹⁾ s. Note 1 am Ende des Buches.

Grösse, welche die Summe der ganzen ins Unendliche fortgesetzten Reihe ist.

KLÜGEL.

„Mathem. Wörterbuch“ (1803),
Abtheil. I, 1, Artikel „Convergierend“.

Zum Begriff des Unendlichen gelangt man durch das Studium der Mathematik — und der menschlichen Dummheit.

J. V.

Fliegende Blätter 1903, p. 20.

Sobald eine Reihe aufhört, convergent zu sein, hat ihre Summe als Summe keinen Sinn.

GAUSS an Bessel.

Göttingen, 5. V. 1812.

s. Briefw. Gauss-Bessel (1880), p. 173.

Divergente Rækker ere i det Hele noget Fandenssskab, og det er en Skam at man vover at grunde nogen Demonstration derpaa. Man kan faae frem hvad man vil naar man bruger dem, og det er dem som har gjort saa megen Ulykke og saa mange Paradoxer. Kan der tænkes noget skrækkeligere end at sige at

$$0 = 1 - 2^n + 3^n - 4^n + \text{etc.}$$

hvor n er et heelt positivt Tal. Risum teneatis amici. Jeg har i det hele faaet Øjnene op paa en meget forbausende Maneer; thi naar man undtager de allersimpleste Tilfælde for Ex: de geometriske Rækker, saa gives der i hele Mathematiken næsten ikke en eneste unendelig Række, hvis Sum er bestemt paa en stræng Maade: med andre Ord det vigtigste af Mathematiken staaer uden Begrundelse. Det meeste er rigtigt; det er sandt, og det er overordentlig forunderligt. Jeg bestræber mig for at søge Grunden dertil. En overmaade interessant Opgave.

(Les séries divergentes sont en bloc une invention du diable, et c'est une honte que l'on ose fonder sur elles la moindre démonstration. On peut en tirer tout ce qu'on veut quand on les emploie, et ce sont elles qui ont produit tant d'échecs et tant de paradoxes. Peut-on penser quelque chose de plus affreux que de dire que

$$0 = 1 - 2^n + 3^n - 4^n + \text{etc.}$$

où n est un nombre entier positif. Risum teneatis amici. Je suis devenu prodigieusement attentif à tout cela; car si l'on excepte les cas de la plus extrême simplicité, par exemple: les séries géométriques, il n'y a presque pas, dans toutes les mathématiques, une seule série infinie dont la somme est déterminée d'une manière rigoureuse: en d'autres termes, ce qu'il y a de plus important dans les mathématiques est sans fondement. La plupart des choses sont exactes: cela est vrai; et c'est extraordinairement surprenant. Je m'efforce d'en chercher la raison. Sujet excessivement intéressant.)

ABEL à Holmboe.
[Berlin], 16. I. 1826.

Der gives yderst faae Sætninger i den høiere Analyse som ere bevisede med overbevisende Strængthed. Overalt finder man den ulykkelige Maade at slutte fra det Specielle til det Almindelige, og yderst mærkværdigt er det at der efter en saadan Fremgangsmaade dog kuns findes faae af de saakaldte Paradoxer. . . . Efter mine Tanker ligger den deri at de Functioner som Analysen hidetil har beskæftiget sig med mestendels lade sig udtrykke ved Potentser. — Saasnart der komme andre imellem hvilket rigtig nok ikke ofte er Tilfældet saa gaaer det gjerne ikke godt og af falske Slutninger opstaae da en Mængde med hinanden forbundne urigtige Sætninger.

(Il n'y a que très peu de propositions, dans l'analyse supérieure, qui soient démontrées avec une rigueur décisive. Partout on trouve la malheureuse manière de conclure du particulier au général, et il est très singulier qu'avec une pareille méthode, il ne se trouve malgré tout que peu de ce qu'on appelle paradoxes. . . . A mon avis cela provient de ce

que les fonctions dont l'analyse s'est occupée jusqu'ici peuvent, la plupart, être exprimées au moyen de puissances. Aussitôt que d'autres interviennent, ce qui, il est vrai, n'arrive pas souvent, alors ça ne va plus, et de conclusions fausses découlent une foule de propositions incorrectes qui s'enchaînent.)

ABEL à Hansteen.

Dresde, 29. III. 1826.

voir „Niels Henrik Abel, Mémorial publié à l'occasion du centenaire de sa naissance“: „Texte original des lettres“, p. 16 et 21/22 ou „Correspondance d'Abel“ (traduction française), p. 16/17 et 23.

Der Gebrauch einer unendlichen Grösse als einer Vollendeten ist in der Mathematik niemals erlaubt. Das Unendliche ist nur eine Façon de parler, indem man eigentlich von Grenzen spricht, denen gewisse Verhältnisse so nahe kommen als man will, während anderen ohne Einschränkung zu wachsen verstattet ist.

GAUSS an Schumacher.

Göttingen, 12. VII. 1831.

s. Briefw. Gauss-Schumacher, Bd. 2 (1860), p. 269.

Trotz wesentlicher Verschiedenheit der Begriffe des potenzialen und actualen Unendlichen, indem ersteres eine veränderliche endliche, über alle endliche Grenzen hinaus wachsende Grösse, letzteres ein in sich festes, constantes, jedoch jenseits aller endlichen Grössen liegendes Quantum bedeutet, tritt doch leider nur zu oft der Fall ein, dass das eine mit dem andern verwechselt wird. . . . Wenn aber aus einer berechtigten Abneigung gegen solches illegitime A. U. sich in breiten Schichten der Wissenschaft, unter dem Einflusse der modernen epikureisch-materialistischen Zeitrichtung, ein gewisser Horror Infiniti ausgebildet hat, der in dem erwähnten Schreiben von Gauss [Brief an Schumacher von 12. VII. 1831, s. Briefw. Gauss-Schumacher, Bd. 2, p. 269—271]¹⁾ seinen

¹⁾ s. das vorhergehende Citat.

klassischen Ausdruck und Rückhalt gefunden, so scheint mir die damit verbundene unkritische Ablehnung des legitimen A. U. kein geringeres Vergehen wider die Natur der Dinge zu sein, die man zu nehmen hat, wie sie sind, und es lässt sich dieses Verhalten auch als eine Art Kurzsichtigkeit auffassen, welche die Möglichkeit raubt, das A. U. zu sehen, obwohl es in seinem höchsten, absoluten Träger uns geschaffen hat und erhält und in seinen secundären, transfiniten Formen uns all-überall umgiebt und sogar unserm Geiste selbst innewohnt.

G. CANTOR.

„Zum Problem des actualen Unendlichen,“
Natur und Offenbarung 32 (1886), p. 226.

Dernièrement Leibnitz m'a fait une dissertation sur les infiniment petits: qui mieux que moi, ma chère, est au fait de ces êtres?¹⁾

SOPHIE CHARLOTTE Reine de Prusse

à son amie M^{lle} de Pöllnitz.

Wusterhausen, 7. VIII. 1702.

voir Erman, „Mémoires pour servir à l'histoire de
Sophie Charlotte“ (Berlin 1801), p. 198.

Was in der Physik die Verbannung der Fernwirkungen, die Erklärung der Erscheinungen durch die inneren Kräfte eines raumerfüllenden Aethers ist, das ist in der Mathematik das Verständnis der Functionen aus ihrem Verhalten im Unendlich-Kleinen, insbesondere also aus den Differentialgleichungen, denen sie genügen.

F. KLEIN.

„Riemann“, Vortrag Naturf.-Vers. Wien 1894.
s. Deutsche Mathem.-Verein. Jahresber. 4, 1894/95, p. 73.

¹⁾ Anspielung auf ihren Gemahl Friedrich I. und dessen Hof; s. Carlyle, „Geschichte Friedrichs II. von Preussen“, deutsch von J. Neuberg, Bd. 1 (Berlin 1858), p. 53, 54, 68, 384.

Zwischen dem Wirken der natürlichen Zuchtwahl während einer Generation und dem Ergebnisse nach hunderttausend Generationen besteht etwa die Beziehung, wie zwischen Differential und Integral. Wieselten vermögen wir letztere Beziehung zu durchschauen, obschon wir sie der Rechnung unterwerfen. Bezweifeln wir deshalb die Richtigkeit unserer Integration?

EMIL DU BOIS-REYMOND.

„Darwin versus Galiani“, Rede Berliner Akad. 6. VII. 1876.
s. Reden, Bd. 1 (1886), p. 228.

Es ist überraschend, dass man in den Naturwissenschaften so oft das „Kleine“ gern in den Kauf nimmt, wenn man sich das „Grosse“ damit erklären zu können glaubt. Das erinnert an das Goethe'sche Wort:

„Du kannst im Grossen nichts verrichten

„Und fängst es nun im Kleinen an.“¹⁾

So meint man, die Massenattraction begreiflicher zu machen, wenn man einen Attractionsäther annimmt und die Kraft nun von Theilchen zu Theilchen wirken lässt; so „erklärt“ die Darwin'sche Theorie die grossen Abweichungen, welche bei den Individuen einer Gattung organischer Wesen auftreten, indem sie lehrt, wie dieselben aus kleinen Änderungen hervorgehen.

L. KRONECKER.

Vorlesungen I (Integrale), herausg. v. Netto (1894), p. 3/4.

Bis auf die neueste Zeit hat man allgemein angenommen, dass eine eindeutige und continuirliche Function einer reellen Veränderlichen auch stets eine erste Ableitung habe, deren

¹⁾ Faust, I, 1360—1361 (Werke, Grosse Weimarische Ausg., Bd. 14 (1887), p. 68), Erste Szene zwischen Faust und Mephistopheles, wo es allerdings bekanntlich „vernichten“ statt „verrichten“ heisst.

Werth nur an einzelnen Stellen unbestimmt oder unendlich gross werden könne. Selbst in den Schriften von Gauss, Cauchy, Dirichlet findet sich meines Wissens keine Äusserung, aus der unzweifelhaft hervorginge, dass diese Mathematiker, welche in ihrer Wissenschaft die strengste Kritik überall zu üben gewohnt waren, anderer Ansicht gewesen seien.

WEIERSTRASS.

„Über continuirliche Functionen eines reellen Arguments, die für keinen Werth des letzteren einen bestimmten Differentialquotienten besitzen“, gelesen i. d. Berl. Akad. 18. VII. 1872.
s. Werke, Bd. 2 (1895), p. 71.

Seit dem Versuche Ampère's, die Frage nach der Existenz eines Differentialquotienten zu beantworten, ist für dieses höchst interessante Problem weiter nichts geschehen, als dass die Nothwendigkeit, die Existenz des Differentialquotienten im Allgemeinen für stetige Functionen zu erweisen, oder die für seine Existenz wesentlichen Stetigkeitsbedingungen zu ermitteln, allgemeiner anerkannt ist, namentlich seit Dirichlet's* strenger Ableitung der Fourier'schen Reihen. Auch C. G. J. Jacobi hat, wie ich aus mündlicher Mittheilung weiss, in seinen Vorlesungen zuweilen von „Curven mit unendlich vielen Spitzen“ gesprochen, und Gauss** nimmt ausdrücklich auf solche Functionen Rücksicht.

* Crelle's Journ. t. IV. 1829. p. 169 [= Dirichlet, Werke, herausg. v. Kronecker, Bd. 1 (1889), p. 131/132].

** Allgem. Lehrsätze in Bez. auf die . . . Kräfte. 1840. art. 16 [= Gauss, Werke, Bd. 5 (1877), p. 218].

HERMANN HANKEL.

Artikel „Grenze“ in Ersch u. Gruber's
Encyklopädie I, 90 (1871), p. 202.

Il y a cent ans, une pareille fonction eut été regardée comme un outrage au sens commun. Une fonction continue, aurait-on dit, est par essence susceptible d'être représentée par une courbe et une courbe a évidemment toujours une tangente.

On voit à quelles erreurs nous expose une folle confiance dans ce qu'on prend pour l'intuition. Par la découverte de cet exemple frappant, Weierstrass nous a donc donné un utile avertissement et nous a appris à mieux apprécier les méthodes impeccables et purement arithmétiques dont il a, plus que personne, contribué à doter la Science.

H. POINCARÉ.

„L'oeuvre mathématique de Weierstrass“,
Acta mathem. 22 (1899), p. 5/6.

In den letzten Jahrzehnten wandte die wissenschaftliche Forschung auch den metamathematischen Problemen sich zu, welche bisher nur Gegenstand laienhafter Anläufe gewesen waren. Solche Untersuchungen galten zuerst den geometrischen Grundbegriffen, Abziehungen [= Abstractionen] ganz besonderer Art, deren Zurückführung auf die notwendigen erzeugenden Vorstellungen schwierig war, später dem Grenzbegriff und damit Zusammenhängendem, — im Vergleich mit anderen Begriffen philosophisches Wild zu nennen, das aber im ersten Heft meiner Allgemeinen Functionentheorie, wie ich glaube, glücklich zur Strecke gebracht ist.

PAUL DU BOIS-REYMOND.

„Über die Grundlagen der Erkenntnis in den
exacten Wissenschaften“ (Tübingen 1890), p. 22.

Der Begriff der Grenze ist, so zu sagen, die organische Kraft der Analysis, die aus dem niederen Material der Arithmetik ein Neues, qualitativ verschiedenes, schafft. Sie tritt überall da mit Nothwendigkeit ein, wo es sich um die Erzeugung eines wesentlich Neuen, um die Vergleichung von qualitativ Verschiedenem handelt; in der Geometrie also namentlich, wenn Krummes durch Gerades gemessen werden soll. Sie ist das Instrument, durch das die Mathematik mit ihrem Zahlenmaterial, das seiner Entstehung nach ein Discretes ist, das

Stetige bezwingt. Nie wird man bei den Untersuchungen der Veränderungen des Stetigen den Begriff der Grenze entbehren können.

HERMANN HANKEL.

Artikel „Grenze“ in Ersch u. Gruber's
Encyklopädie I, 90 (1871), p. 201.

In unserem Jahrhundert treten die Begriffe Substitution und Substitutionsgruppe, Transformation und Transformationsgruppe, Operation und Operationsgruppe, Invariante, Differentialinvariante und Differentialparameter immer deutlicher als die wichtigsten Begriffe der Mathematik hervor.

SOPHUS LIE.

Leipziger Ber. 47 (1895), Math.-phys. Cl., p. 261.

Die Begriffe Invariante und continuierliche Gruppe sind so alt wie die Mathematik selbst,¹ wenn sie auch erst am Schlusse des vorigen Jahrhunderts in speciellen Fällen einiger-massen deutlich hervortreten.

SOPHUS LIE.

Leipziger Ber. 45 (1893), Math.-phys. Cl., p. 370.

Der Gruppenbegriff, durch Gauss und Galois in die Mathematik eingeführt, hat in neuerer Zeit in allen Zweigen unserer Wissenschaft eine fundamentale Bedeutung erlangt.

G. FROBENIUS.

Antrittsrede in d. Berl. Akademie.
s. Berl. Sitzungsber. 1893, p. 627.

As all roads are said to lead to Rome, so I find, in my own case at least, that all algebraical inquiries sooner or

later end at that Capitol of Modern Algebra over whose shining portal is inscribed „Theory of Invariants“.

J. J. SYLVESTER.

(„Trilogy“), Philosoph. Transactions of the Roy. Soc. of London,
Vol. 154, Part. III (1864), p. 579.

Fuchs: . . . Fast möcht' ich nun moderne Algebra studieren.

Meph.: Ich wünschte nicht euch irre zu führen.

Was diese Wissenschaft betrifft,

Es ist so schwer, die leere Form zu meiden,

Und wenn ihr es nicht recht begriff't,

Vermögt die Indices ihr kaum zu unterscheiden.

Am Besten ist's, wenn ihr nur Einem traut

Und auf des Meisters Formeln baut.

Im Ganzen — haltet euch an die Symbole.

Dann geht ihr zu der Forschung Wohle

Ins sichere Reich der Formeln ein.

Fuchs: Ein Resultat muss beim Symbole sein?

Meph.: Schon gut! Nur muss man sich nicht allzu ängstlich
quälen.

Denn eben, wo die Resultate fehlen,

Stellt ein Symbol zur rechten Zeit sich ein.

Symbolisch lässt sich alles schreiben,

Müsst nur im Allgemeinen bleiben.

Wenn man der Gleichung Lösung nicht erkannte,

Schreibt man sie als Determinante.

Schreib was du willst, nur rechne nie was aus.

Symbole lassen trefflich sich traktieren,

Mit einem Strich ist alles auszuführen.

Und mit Symbolen kommt man immer aus.¹⁾

KURD LASSWITZ.

Aus „Prost. Der Faust-Tragödie (— n)ter Teil.“
s. Zeitschr. math. naturw. Unterr. 14 (1883), p. 317.

¹⁾ nach Goethe, Faust I, „Schülerscene“.

Die Behandlung algebraischer Fragen übte von Anfang an einen besondern Reiz auf mich aus, und zu ihnen bin ich mit Vorliebe immer wieder zurückgekehrt, wenn ich nach anstrengenden analytischen Arbeiten einer Ruhepause bedurfte.

G. FROBENIUS.

Antrittsrede in d. Berl. Akademie.
s. Berl. Sitzungsber. 1893, p. 627.

Eine Wissenschaft kann niemals etwas anders sein, als die durchgeführte Entwicklung des ihr zu Grunde liegenden Begriffs. Dieser Begriff ist für die Algebra die Zahl. . . . Die Algebra mag immerhin das ausführen, was der Zahl überhaupt und allgemein eigen ist, aber sie darf auch das nicht vergessen, was ausser der Grösse selbst, die Zahl characterisirt und weitere Unterscheidungen in derselben begründet. Unstreitig ist es daher auch nicht sehr wissenschaftlich, die Zahlenlehre, bei dem Studium der Mathematik, als einen isolirten und entbehrlichen Theil dieser Wissenschaft bei Seite zu setzen Der Grund, aus welchem die häufig Statt findende Zurücksetzung der reinen Zahlenlehre im Unterrichte hervorgeht, liegt unstreitig weniger in dem Verkennen der oben geäusserten, gar nicht neuen Bemerkungen, als in der sehr vorherrschenden Richtung auf die angewandte Mathematik, für welche die Arithmetik unmittelbar keine Hülfsmittel darbietet. Aber die Mathematik nimmt eine selbstständige Würde in Anspruch und es muss der wesentliche Zweck des Unterrichts sein, das Bewusstsein dieser Würde zu erwecken, und ihre Anerkennung durch die Wissenschaft selbst zu begründen.

FERD. MINDING.

Voranzeige seiner „Höheren Arithmetik“ (Berlin 1832)
in J. f. Math. 7 (1831), p. 414.

Il est à croire . . qu'Euler avait un goût particulier pour ce genre de recherches [de la science des nombres], et qu'il

s'y livrait avec une sorte de passion, comme il arrive à presque tous ceux qui s'en occupent.

LEGENDRE.

„Théorie des nombres“, Préface.

In alio forte labore . . occupatus, casu incidi in eximiam quandam veritatem arithmetica (fuit autem in fallor theorema art. 108 [Omnium numerorum primorum formae $4n + 1$, — 1 est residuum quadraticum, omnium vero numerorum primorum formae $4n + 3$ non-residuum]), quam quum et per se pulcherrimam aestimarem et cum majoribus connexam esse suspicarer, summa qua potui contentione in id incubui, ut principia quibus inniteretur perspicere, demonstrationemque rigorosam nanciscere. Quod postquam tandem ex voto successisset, illecebris harum quaestionum ita fui implicatus, ut eas deserere non potuerim. —

C. F. GAUSS.

„Disquisitiones arithm.“, Praefatio.
s. Werke, Bd. 1 (1870), p. 6.

Merkwürdig ist es immer dass alle diejenigen die diese Wissenschaft [die höhere Arithmetik] ernstlich studiren eine Art Leidenschaft dafür fassen.

GAUSS an W. Bolyai.

Göttingen, 2. IX. 1808.

s. Briefw. Gauss-Bolyai, herausg. v. Schmidt u. Stäckel (1899), p. 94.

Göpel wurde, wie viele von denen, welche zur rein mathematischen Speculation berufen sind, zunächst von der höhern Zahlenlehre angezogen.

C. G. J. JACOBI.

J. f. Math. 35 (1847), p. 313/314

= Ostwald's Klassiker der exakt. Wissensch., Nr. 67, p. 52

= Jacobi, Werke, herausg. v. Weierstrass, Bd. 2 (1882), p. 148.

Das Hauptinteresse der Mathematiker richtete sich auf die multiplicative Zusammensetzung der Zahlen. Und doch hätte unsere Wissenschaft [die Zahlentheorie] bei systematischem Vorgehen zuerst die Zerlegung der Zahlen in ihre Summanden erledigen müssen.

L. KRONECKER.

Vorles. II, Abschn. 1 (Zahlentheorie), herausg. v. Hensel, Teil I (1901), p. 56.

Ich habe die Unart, ein lebhaftes Interesse bei mathematischen Gegenständen nur da zu nehmen, wo ich sinnreiche Ideenverbindungen und durch Eleganz oder Allgemeinheit sich empfehlende Resultate ahnen darf.

GAUSS an Schumacher.

Göttingen, 17. IX. 1808.

s. Briefw. Gauss-Schumacher, Bd. 1 (1860), p. 2.

Ich gestehe, dass das Fermat'sche Theorem als isolirter Satz für mich wenig Interesse hat, denn es lassen sich eine Menge solcher Sätze leicht aufstellen, die man weder beweisen, noch widerlegen kann. Allein ich bin doch dadurch veranlasst, einige alte Ideen zu einer grossen Erweiterung der höheren Arithmetik wieder vorzunehmen. Freilich gehört diese Theorie zu den Dingen, wo man nicht voraussetzen kann, inwiefern es gelingen wird, dunkel vorschwebende entfernte Ziele zu erreichen. Ein glückliches Gestirn muss mit obwalten, und meine Lage und so vielfache abziehende Geschäfte erlauben mir freilich nicht, solchen Meditationen so nachzuhängen, wie in den glücklichen Jahren 1796—1798, wo ich die Hauptsachen meiner *Disquisitiones Arithmeticae* bildete. Allein ich bin überzeugt, wenn das Glück mehr thun sollte, als ich erwarten darf, und mir einige Hauptschritte in jener Theorie glücken, auch der Fermat'sche Satz nur als eines der am wenigsten interessanten Corollarien dabei erscheinen wird.

GAUSS an Olbers.

Göttingen, 21. III. 1816.

s. „Wilhelm Olbers, Sein Leben und seine Werke“, herausg. v. C. Schilling, Bd. 2 (1900), p. 629.

Fermatius theorema suum inclytum non demonstravit.

L. KRONECKER.

Doctorthese Berlin 1845.

s. Werke, Bd. 1, p. 73; vgl. hiermit a.

Kronecker, Vorles. üb. Zahlentheorie, I, p. 14 f.

u. Anm. des Herausgebers K. Hensel l. c., p. 497.

C'est en quelque sorte une tache pour la Géométrie moderne que l'on n'ait pu retrouver encore les démonstrations des théorèmes que Fermat nous a laissés, et qu'il nous assure avoir démontrés. . . . Le grand géomètre avait certainement une méthode toute particulière et peut-être fort simple qui l'a conduit aux différents théorèmes qu'il nous a laissés, et dont la démonstration ne nous paraît aussi difficile que parce que nous n'avons point encore retrouvé le fil de ses idées.

LAPLACE à Lagrange.

3. II. 1778.

voir Oeuvres de Lagrange, t. 14 (1892), p. 74.

Sie sagten einmal von Euklides, dass er Begriffe und Sätze der höheren Arithmetik besessen haben müsse, von denen sich in den Elementen keine directe Spur nachweisen lasse. — —

BESSEL an Gauss.

Königsberg, 20. I. 1820

s. Briefw. Gauss-Bessel (1880), p. 311.

Es erscheint geraten, die durch Euklid in die Zahlenlehre hineingetragene geometrische Tendenz allmählich abzustreifen.

L. KRONECKER.

Vorles. II, Abschn. 1 (Zahlentheorie),

herausg. v. Hensel, Teil I (1901), p. 64.

Da man in der Wirklichkeit alle Brüche durch Einführung hinreichend kleiner Untereinheiten auf ganze Zahlen zurückführen könnte, so ist klar, was es mit dem nebelhaften Begriff einer Zahl, die das Stetige decke, und mit dem zugehörigen

Unbegriff einer stetig interpolirten Zahlenreihe für eine Bewandtniss habe. Es ist hier einfach eine jener voreiligen Erdichtungen und Verdinglichungen im Spiele, zu welcher die Modernen, und zwar . . nicht nach dem Vorgang der Alten, sondern im Gegensatz zu den strengeren antiken Vorstellungsarten auf Veranlassung oberflächlich aufgefasster Übereinstimmungen des Rechnungsschematismus gelangt sind.

EUGEN DÜHRING.

„Kritische Gesch. der allgem. Principien der Mechanik,“ 2. umgearb. Aufl. (1877), p. 501.

Bei der geometrischen Anschauung gehen wir durch jede unendlich kleine Grösse, die in der gegebenen enthalten ist, und können eben deswegen diese nicht als Theile ansehen durch deren Zusammensetzung das Ganze entstanden wäre; bei der Zusammensetzung der Zahl hingegen gehen wir nicht durch alle unendlich kleine Theile woraus jede Einheit besteht, sonst würden wir uns die Zahl als Linie, als stetige Grösse denken, sondern wir nehmen die Einheit selbst, und durch diese bekommen wir natürliche Abschnitte, d. h. Theile.

Ich glaube, dass dies den wesentlichen Unterschied der Arithmetik von der Geometrie ausmacht. — — —

SCHLEIERMACHER

als Erzieher im gräfl. Dohnaschen Hause an den damaligen Referendar, späteren preuss. Staatsminister Burggrafen Friedr. Ferd. Alex. zu Dohna.

Schlobitten, 16. XII. 1791.

s. H. Borkowski, „Schleiermacher als Mathematiker“, Arch. Math. Phys. (2) 16 (1898), p. 339/340.

L'algebre n'est qu'une géométrie écrite, la géométrie n'est qu'une algèbre figurée.

SOPHIE GERMAIN.

„Pensées diverses.“

voir Oeuvres philosophiques, édition de Stupuy (1896), p. 223.

Die arithmetischen Zeichen sind geschriebene Figuren und die geometrischen Figuren sind gezeichnete Formeln.

D. HILBERT.

„Mathematische Probleme“, Vortr. Mathem.-Congr. Paris 1900.

s. Göttinger Nachr. 1900, Math.-phys. Kl., p. 259

= Arch. Math. Phys. (3) 1 (1901), p. 50.

Ich fordere, dass die Arithmetik sich aus sich selbst heraus entwickeln soll. . . . Sowie die negativen und gebrochenen rationalen Zahlen durch eine freie Schöpfung hergestellt, und wie die Gesetze der Rechnungen mit diesen Zahlen auf die Gesetze der Rechnungen mit ganzen positiven Zahlen zurückgeführt werden müssen und können, ebenso hat man dahin zu streben, dass auch die irrationalen Zahlen durch die rationalen Zahlen allein vollständig definirt werden.

R. DEDEKIND.

„Stetigkeit und irrationale Zahlen“ (1872), p. 17.

Die allgemeine Theorie der ganzen ganzzahligen Functionen gestattet alle der eigentlichen Arithmetik fremden Begriffe, den der negativen, der gebrochenen, der reellen und der imaginären algebraischen Zahlen, auszuscheiden.

L. KRONECKER.¹⁾

„Über den Zahlbegriff“, J. f. Math. 101 (1887), p. 345.

Ich glaube, dass es dereinst gelingen wird, den gesamten Inhalt aller mathematischen Disciplinen mit Ausnahme der Geometrie und Mechanik zu „arithmetisiren“, d. h. einzig und allein auf den im engsten Sinne genommenen Zahlbegriff zu gründen, also die Modificationen und Erweiterungen dieses

¹⁾ s. Note 2 am Ende des Buches.

Begriffs* wieder abzustreifen, welche zumeist durch die Anwendungen auf die Geometrie und Mechanik veranlasst worden sind.

* Ich meine hier namentlich die Hinzunahme der irrationalen sowie der continuirlichen Größen.

L. KRONECKER.

„Über den Zahlbegriff“, Philos. Aufs., Eduard Zeller z. s. 50-jähr.

Doctor-Jubil. gewidmet (Berlin 1887), p. 265

= J. f. Math. 101 (1887), p. 338/339

= Kronecker, Werke, herausg. v. Hensel, Bd. 3, 1 (1899), p. 253.

Ein rein formalistisch-literales Gerippe der Analysis, worauf die Trennung der Zahl nebst den analytischen Zeichen von der Grösse hinauslief, würde diese Wissenschaft, welche in Wahrheit eine Naturwissenschaft ist, wenn sie auch nur die allgemeinsten Eigenschaften des Wahrgenommenen in den Bereich ihrer Forschungen zieht, schliesslich . . . zum blossen Zeichenspiel hinabwürdigem, wo den Schriftzeichen willkürliche Bedeutungen beigelegt werden, wie den Schachfiguren und Spielkarten. — —

Ohne Frage wird man mit Hülfe von sogenannten Axiomen, von Conventionen, ad hoc erdachten Philosophemen, unfassbaren Erweiterungen ursprünglich deutlicher Begriffe nachträglich ein System der Arithmetik construieren können, welches dem aus dem Grössenbegriff hervorgegangenen in allen Punkten gleicht Allein man würde auf dieselbe Weise auch andere arithmetische Systeme sich ausdenken können, wie dies ja geschehen ist. Die gewöhnliche Arithmetik ist eben die einzige dem lineären¹⁾ Grössenbegriff entsprechende, ist gleichsam seine erste Registrirung, während die Analysis, mit dem Grenzbegriff an der Spitze, seine höchste Entwicklung bildet.

PAUL DU BOIS-REYMOND.

„Allgemeine Functionentheorie“ (1882), p. 53/54.

¹⁾ „lineär“ bedeutet hier „wie Längen in der Richtung des Kleinsten und Grössten ausgedehnt und wie diese vergleichbar, messbar“ (s. l. c. p. 23).

Wenn ich die Strenge in den Beweisen als Erforderniss für eine vollkommene Lösung eines Problems hinstelle, so möchte ich andererseits zugleich die Meinung widerlegen, als seien etwa nur die Begriffe der Analysis oder gar nur diejenigen der Arithmetik der völlig strengen Behandlung fähig. Eine solche bisweilen von hervorragenden Seiten vertretene Meinung halte ich für durchaus irrig; eine so einseitige Auslegung der Forderung der Strenge führt bald zu einer Ignorirung aller aus der Geometrie, Mechanik und Physik stammenden Begriffe, zu einer Unterbindung des Zuflusses von neuem Material aus der Aussenwelt und schliesslich sogar in letzter Consequenz zu einer Verwerfung der Begriffe des Continuum und der Irrationalzahl. Welch' wichtiger Lebensnerv aber würde der Mathematik abgeschnitten durch eine Exstirpation der Geometrie und der mathematischen Physik? [!] Ich meine im Gegenteil, wo immer von erkenntnistheoretischer Seite oder in der Geometrie oder aus den Theorien der Naturwissenschaft mathematische Begriffe auftauchen, erwächst der Mathematik die Aufgabe, die diesen Begriffen zu Grunde liegenden Principien zu erforschen und dieselben durch ein einfaches und vollständiges System von Axiomen derart festzulegen, dass die Schärfe der neuen Begriffe und ihre Verwendbarkeit zur Deduktion den alten arithmetischen Begriffen in keiner Hinsicht nachsteht.

D. HILBERT.

„Mathematische Probleme“, Vortr. Mathem.-Congr. Paris 1900.
s. Göttinger Nachr. 1900, Math.-phys. Kl., p. 258/259
= Arch. Math. Phys. (3) 1 (1901), p. 49.

Die Arithmetik, die bei Diophant und Fermat den Character einer unterhaltenden Denkübung, eines geistreichen Spieles trug, war nach den Vorarbeiten von Euler, Lagrange und Legendre durch Gauss zu dem Range einer Wissenschaft erhoben worden. Die Königin der Mathematik nannte sie der Fürst der Mathematiker, und sie verdient diesen Titel nicht nur durch ihren hohen Rang, sondern auch durch die stolze

Abgeschiedenheit, in der sie, fern von allen anderen Wissensgebieten, fern auch von den übrigen mathematischen Disciplinen thronte. Ihr machte das Genie von Gauss in seiner Lehre von der Kreistheilung die Algebra tributpflichtig, ihr legte Jacobi's siegreiche Kraft den unermesslichen Formelschatz der Theorie der elliptischen Functionen zu Füßen, in ihren Dienst zwang Dirichlet's Scharfsinn die feinsten Grenzmethode der Analysis. Diese sich selbst genügende Wissenschaft zur ersten Dienerin der Algebra und Functionentheorie erhoben zu haben, ist Kronecker's unsterbliches Verdienst, dessen hohe Bedeutung erst jetzt allmählich anfängt, weiteren Kreisen zum Bewusstsein zu kommen, und dessen volle Würdigung nur von künftigen Geschlechtern zu erwarten ist.

G. FROBENIUS.

„Gedächtnissrede auf L. Kronecker“, Berl. Akad. 29. VI. 1893.
s. Berliner Abh. 1893, p. 4.

Ähnlich wie bei den Beziehungen verschiedener Wissenschaften zu einander wird da, wo verschiedene Disciplinen einer Wissenschaft in einander greifen, die eine durch die andre gefördert und die Forschung in naturgemässe Bahnen geleitet.

L. KRONECKER.

Antrittsrede i. d. Berl. Akademie.
s. Berl. Monatsber. 1861, p. 639.

Während ich sage, dass eine sog. irrationale Zahl eine so reelle Existenz habe wie irgend etwas anderes in der Gedankenwelt, ist es bei Kronecker jetzt ein Axiom, dass es nur Gleichungen zwischen ganzen Zahlen giebt. — — —

Schlimmer ist es aber, wenn Kronecker seine Autorität dafür einsetzt, dass alle, die bis jetzt an der Begründung der Functionentheorie gearbeitet haben, Sünder vor dem Herrn sind. Wenn ein wunderlicher Kauz wie Christoffel sagt, in 20—30 Jahren wird die jetzige Functionentheorie zu Grabe ge-

tragen und die ganze Analysis in die Theorie der Formen aufgegangen sein, so beantwortet man das mit einem Achselzucken. Wenn aber Kronecker den Ausspruch thut, den ich wörtlich wiederhole: „Wenn mir noch Jahre und Kräfte genug bleiben, werde ich selber der mathematischen Welt zeigen, dass nicht nur die Geometrie, sondern auch die Arithmetik der Analysis die Wege weisen kann, und sicher die strengeren. Kann ich es nicht mehr thun, so werden's die thun, die nach mir kommen. . . . und sie werden auch die Unrichtigkeit aller jener Schlüsse erkennen, mit denen jetzt die sogenannte Analysis arbeitet“; so ist ein solcher Ausspruch von einem Manne, dessen hohe Begabung für mathematische Forschung und eminente Leistungen von mir sicher ebenso aufrichtig und freudig bewundert werden wie von allen seinen Fachgenossen, nicht nur beschämend für diejenigen, denen zugemuthet wird, dass sie als Irrthum anerkennen und abschwören sollen, was den Inhalt ihres unablässigen Denkens und Strebens ausgemacht hat, sondern ist es auch ein directer Appell an die jüngere Generation, ihre bisherigen Führer zu verlassen und um ihn als Jünger einer neuen Lehre, die freilich erst begründet werden soll, sich zu scharen. Wirklich, es ist traurig und erfüllt mich mit bitterm Schmerz, dass das wohlberechtigte Selbstgefühl eines Mannes, dessen Ruhm unbestritten ist, ihn zu Äusserungen zu treiben vermag, bei denen er nicht einmal zu empfinden scheint, wie verletzend sie für andere sind. Aber genug von [diesen Dingen, die ich nur berührt habe, um Dir zu erklären, aus welchen Gründen ich an meiner Lehrthätigkeit künftighin nicht mehr dieselbe Freude haben kann wie bisher. Du wirst aber darüber nicht reden; ich möchte nicht, dass Andere, die mich nicht so genau kennen wie Du, in dem Gesagten den Ausdruck einer Empfindlichkeit sähen, die mir in der That fremd ist. Niemand weiss besser als ich selbst, wie weit ich von dem Ziele entfernt geblieben bin, das ich in der Begeisterung der Jugend mir gesteckt hatte, niemand soll mir aber auch das Bewusstsein rauben, dass mein Streben und Wirken nicht ganz umsonst gewesen ist und der Weg, auf dem

ich der Wahrheit nachgegangen bin, nicht als ein Irrweg sich erweisen wird.

WEIERSTRASS an S. Kowalevski.

24. III. 1885.

s. Mittag-Leffler, „Une page de la vie de Weierstrass“,
C. R. du deuxième congrès intern. des mathém. Paris 1900
(Paris 1902), p. 150—152.

Une certaine méfiance à l'égard de la géométrie est le caractère propre de l'Ecole de Berlin; pour ainsi dire elle ne cherche pas à voir, mais à comprendre.

Tout dérive donc du nombre entier et participe par conséquent de la certitude de l'arithmétique; le continu lui-même se ramène à cette origine et toutes les égalités qui font l'objet de l'Analyse et où figurent des grandeurs continues ne sont plus que des symboles, remplaçant une multitude infinie d'inégalités entre nombres entiers.

Les notions analytiques sont donc pour Weierstrass, comme pour Kronecker, des constructions faites avec les mêmes matériaux, les nombres entiers. Mais il y a une différence entre les deux conceptions; Kronecker est surtout préoccupé de mettre en évidence le sens philosophique des vérités mathématiques; le nombre entier étant le fond de tout, il veut qu'il reste partout apparent; pour lui, les seules opérations licites sont l'addition et la multiplication; ce n'est que par une concession aux préjugés contemporains, qu'il consent quelquefois à admettre la division.

Tel n'est pas le point de vue de Weierstrass. Dès qu'il a élevé une construction, il oublie de quels matériaux elle est faite et n'y veut plus voir qu'une unité nouvelle dont il fera l'un des éléments d'une construction plus grandiose. Il peut le faire sans crainte, car il en a, une fois pour toutes, éprouvé la solidité.

Ces unités intermédiaires ne sont sans doute que des auxiliaires; mais notre esprit est si faible qu'il ne peut s'en passer; car il ne peut percevoir à la fois tous les détails d'un

grand ensemble. Ces artifices sont donc nécessaires si l'on veut marcher toujours en avant et c'est là justement ce que veut Weierstrass. Kronecker, lui aussi, a fait bien des découvertes; mais s'il y est arrivé, c'est en oubliant qu'il était philosophe et en délaissant lui-même ses principes qui étaient condamnés d'avance à la stérilité.

H. POINCARÉ.

„L'oeuvre mathématique de Weierstrass“,
Acta mathem. 22 (1899), p. 16/17.

Auf einem . . . Spaziergange sagte Kronecker zum Verfasser dieser Zeilen: „Ich betrachte die Mathematik nur als eine Abstraction der arithmetischen Wirklichkeit.“ . . . Wie sehr ihm diese Anschauung Herzenssache war, und wie fest er auf ein Durchdringen seiner Auffassung des Zahlbegriffs vertraute, hat Verfasser oft Gelegenheit gehabt zu bemerken. So that er auch bei einem Besuche des Verfassers am 17. October 1890, als sich das Gespräch auf die Geometrie wandte, mit Bezug auf seine arithmetischen Grundanschauungen ganz siegesgewiss und triumphirend den Ausspruch: „Mir gehört die Zukunft! Mir gehört die Zukunft!“

A. GUTZMER.

„Leopold Kronecker“,
Naturwiss. Wochenschr. 8 (1893), p. 592.

Wenn ich nicht irre, geschieht die moderne Entwicklung der reinen Mathematik vornehmlich unter dem Zeichen der Zahl: Dedekind's und Weierstrass's Definitionen der arithmetischen Grundbegriffe und Cantor's allgemeine Zahlgebilde führen zu einer Arithmetisirung der Functionentheorie und dienen zur Durchführung des Princip's, dass auch in der Functionentheorie eine Thatsache erst dann als bewiesen gilt, wenn sie in letzter Instanz auf Beziehungen für ganze rationale Zahlen zurückgeführt worden ist. Die Arithmeti-

sirung der Geometrie vollzieht sich durch die modernen Untersuchungen über Nicht-Euklidische Geometrie, in denen es sich um einen streng logischen Aufbau derselben und um die möglichst directe und völlig einwandsfreie Einführung der Zahl in die Geometrie handelt.

D. HILBERT.

„Die Theorie der algebr. Zahlkörper“, Vorwort, p. V
in Deutsche Mathem.-Verein. Jahresber. 4, 1894/1895.

Je mehr ich über die Principien der Functionentheorie nachdenke — und ich thue dies unablässig —, um so fester wird meine Überzeugung, dass diese auf dem Fundamente algebraischer Wahrheiten aufgebaut werden muss, und dass es deshalb nicht der richtige Weg ist, wenn umgekehrt zur Begründung einfacher und fundamentaler algebraischer Sätze das „Transcendente“, um mich kurz auszudrücken, in Anspruch genommen wird — so bestechend auch auf den ersten Anblick z. B. die Betrachtungen sein mögen, durch welche Riemann so viele der wichtigsten Eigenschaften algebraischer Functionen entdeckt hat. (Dass dem Forscher, so lange er sucht, jeder Weg gestattet sein muss, versteht sich von selbst; es handelt sich nur um die systematische Begründung).

WEIERSTRASS an H. A. Schwarz.

3. X. 1875.

s. Werke, Bd. 2 (1895), p. 235.

Parmi les Sciences mathématiques, la première est la Science du Calcul, qui repose sur la seule notion de nombre et à laquelle on s'efforce de ramener toutes les autres.

APPELL.

„Mécanique rationnelle“, 1 (1893), p. 1.

Unter allen Disciplinen der Mathematik ist die Theorie der Differentialgleichungen die wichtigste. . . . Sie giebt den Weg zur Erklärung aller elementaren Naturphänomene, die Zeit brauchen, . . . und hat auf der anderen Seite darin eine entsprechende theoretische Wichtigkeit, dass sie in rationeller Weise zum Studium neuer wichtiger Functionen, bez. Functionsclassen leitet.

SOPHUS LIE.

Leipziger Ber. 47 (1895), Math.-phys. Cl., p. 262; s. a. l. c. p. 53.

Die Mathematik hielt Gauss um seine eigenen Worte zu gebrauchen, für die Königin der Wissenschaften und die Arithmetik für die Königin der Mathematik. Diese lasse sich dann öfter herab der Astronomie und andern Naturwissenschaften einen Dienst zu erweisen, doch gebühre ihr unter allen Verhältnissen der erste Rang.

SARTORIUS v. WALTERSHAUSEN.

„Gauss zum Gedächtniss“ (1856), p. 79.

τοῦ γὰρ αἰεὶ ὄντος ἡ γεωμετρικὴ γνῶσις ἐστίν.

[denn die Geometrie ist die Erkenntnis des ewig Seienden].

PLATO.

Πολιτεία [Staat] VII, 527 b.

v. Opera II, Bibl. Didotiana 46 (Paris 1883), p. 132, 53—54.

Als eine vielleicht noch nicht allgemein geteilte persönliche Ansicht möchte ich . . aussprechen, dass mir die reine Mathematik bloss als ein Zweig der allgemeinen Logik erscheint: der Zweig, welcher auf die Schöpfung der Zahlen sich gründet, deren wirtschaftlichen Vorzügen die ungeheuerere Entwicklung zu verdanken ist, die diesem besondern Zweig zuteil geworden im Vergleich mit den übrigen Zweigen der

Logik, die bis in die jüngste Zeit fast stationär geblieben waren.

E. SCHRÖDER.

„Über Pasigraphie“ etc.

s. Verhandl. d. 1. intern. Mathem.-Congr. Zürich 1897

(Leipzig 1898), p. 149.

Sehen wir von den Arbeiten der Gebrüder Grassmann in Stettin und des Professors Schroeder in Karlsruhe ab, so bieten sämtliche andere Darstellungen der Zahlenlehre in ihren grundlegenden Abschnitten bei ihren sogenannten Beweisen die bedenklichsten Zirkelschlüsse und Trugschlüsse, welche nichts beweisen und nur geeignet sind, die Leser an unwissenschaftliches Denken zu gewöhnen und sie zu verwirren.

Es mag diese Behauptung vielen Lesern übertrieben und anmasend erscheinen; aber sie ist durchaus wahr und darf im Interesse der Wissenschaft nicht verschwiegen werden. Fast alle Darstellungen der Zahlenlehre, auch die zuletzt erschienenen gründen (und dies ist ein Fehler, der zuerst gerügt werden muss, da er bereits die Möglichkeit strenger Wissenschaftlichkeit ausschliesst) ihre Beweise auf logische Schlüsse, obwohl ihre Schüler noch gar keine Logik studirt haben, und obwohl es bis in die neueste Zeit noch gar keine wissenschaftliche Darstellung der Logik gegeben hat.

R. GRASSMANN, [Bruder v. Hermann Grassmann d. Älteren].

„Das Gebäude des Wissens“,

Bd. 23: „Die Formenlehre oder Mathematik“ (Stettin 1895),

Erster Zweig: „Die Zahlenlehre oder Arithmetik“, Vorwort, p. IV.

Wir sehen in der Mathematik die bewusste logische Thätigkeit unseres Geistes in ihrer reinsten und vollendetsten Form; wir können hier die ganze Mühe derselben kennen lernen, die grosse Vorsicht, mit der sie vorschreiten muss, die Genauigkeit, welche nöthig ist, um den Umfang der gewonnenen

allgemeinen Sätze genau zu bestimmen, die Schwierigkeit, abstracte Begriffe zu bilden und zu verstehen; aber ebenso auch Vertrauen fassen lernen in die Sicherheit, Tragweite und Fruchtbarkeit solcher Gedankenarbeit.

HELMHOLTZ.

„Über das Verhältniss der Naturwissenschaften zur Gesamtheit der Wissenschaft,“ Prorektoratsrede Heidelberg 22. XI. 1862.
s. Vorträge und Reden, 4. Aufl., Bd. 1 (1896), p. 176.

Die Mathematik wird ja seit alten Zeiten als die unentbehrlichste Schule des philosophischen Denkens angesehen und die Forschung des Mathematikers in ihren höchsten Sphären ist ja der reinen Speculation am nächsten verwandt; sie ist die vollendetste Vereinigung zwischen exaktem Wissen und theoretischem Denken.

E. CURTIUS.

Festrede i. d. Berl. Akademie 3. VII. 1873.
s. Berl. Monatsber. 1873, p. 517.

Die Mathematik hat sich thatsächlich als eins der stärksten, wenn nicht als das stärkste Gährungsmittel im Denken vor Allem des siebenzehnten und achtzehnten Jahrhunderts erwiesen.

KARL LAMPRECHT.

Zukunft, 12. IV. 1902, p. 62.

Uns fehlt eine Selbstkritik der Wissenschaft; Urtheile der Kunst, der Religion, des Gefühls über die Wissenschaft sind so zahlreich wie unnütz. Vielleicht ist dies die letzte Bestimmung der Mathematik!

PAUL MONGRÉ [FELIX HAUSDORFF¹⁾].

„Sant' Ilario, Gedanken aus der Landschaft
Zarathustras“ (1897), p. 342.

¹⁾ s. Kürschner's deutschen Litteratur-Kalender 1903.

In the „Fortnightly Review“ [1869] we are told that „Mathematics is that study which knows nothing of observation, nothing of experiment, nothing of induction, nothing of causation“.¹⁾ I think no statement could have been made more opposite to the undoubted facts of the case, that mathematical analysis is constantly invoking the aid of new principles, new ideas, and new methods, not capable of being defined by any form of words, but springing direct from the inherent powers and activity of the human mind, and from continually renewed introspection of that inner world of thought of which the phenomena are as varied and require as close attention to discern as those of the outer physical world (to which the inner one in each individual man may, I think, be conceived to stand in somewhat the same general relation of correspondence as a shadow to the object from which it is projected, or as the hollow palm of one hand to the closed fist with which it grasps of the other), that it is unceasingly calling forth the faculties of observation and comparison, that one of its principal weapons is induction, that it has frequent recourse to experimental trial and verification, and that it affords a boundless scope for the exercise of the highest efforts of imagination and invention.

SYLVESTER.

Address Meeting of the British Association Exeter 1869.
cf. Report, Notices and Abstracts, p. 4.

. . . in the . . . paper, there is a statement concerning the method of the mathematical sciences, which brought upon me, during the meeting of the British Association at Exeter, the artillery of our eminent friend Professor Sylvester.

No one knows better than you do, how readily I should defer to the opinion of so great a mathematician if the question at issue were really, as he seems to think it is, a

¹⁾ s. Huxley, „Lay sermons, addresses and reviews“ (London 1870), p. 185.

mathematical one. But I submit, that the dictum of a mathematical athlete upon a difficult problem which mathematics offers to philosophy, has no more special weight, than the verdict of that great pedestrian Captain Barclay would have had, in settling a disputed point in the physiology of locomotion.

THOMAS HENRY HUXLEY.

„Lay sermons, addresses and reviews“
(London 1870), Prefatory letter to Tyndall, p. VI.

Auch die mathematische Untersuchung, welche mehr, als man zu glauben pflegt, inductiv verfährt, besitzt, was dem metaphysischen Denken fehlt, das sichere Mittel zu entscheiden, ob sie richtig vermuthete oder nicht. Aber der Mathematiker schöpft die Entscheidung aus sich selber, und darum ist seine Beschäftigung minder als der Versuch geeignet, das Vertrauen auf die Speculation zu erschüttern. Daher konnte die Menschheit zwei Jahrtausende Mathematik treiben, ohne dass dies ihren speculativen Hang zügelte; und daher waren zwei der grössten Mathematiker des siebzehnten Jahrhunderts, Descartes und Leibniz, auch noch dessen kühnste Methaphysiker.

EMIL DU BOIS-REYMOND.

„Darwin versus Galiani“,
Festrede Berl. Akademie 6. VII. 1876.
s. Reden, Bd. 1 (1886), p. 234.

Auch die Mathematik ist eine Sprache, und zwar nach Bau und Inhalt die vollkommenste Sprache, die es giebt, höher als jede Volkssprache; ja, weil alle Völker sie verstehen, kann sie die Sprache der Sprachen heissen. In ihr spricht sozusagen die Natur selbst, in ihr hat der Schöpfer der Welt geredet und in ihr redet noch immer ihr Erhalter.

C. DILLMANN.

„Die Mathematik die Fackelträgerin einer
neuen Zeit“ (Stuttgart 1889), p. 5.

Les mathématiques ont été de tout temps les adversaires implacables des romans scientifiques.

ARAGO.

Oeuvres, t. 3 (1855), p. 498 = Werke, Bd. 3 (1855), p. 401.

Vom Pythagoräischen Lehrsatz.

Die Wahrheit, sie besteht in Ewigkeit,
Wenn erst die blöde Welt ihr Licht erkannt:
Der Lehrsatz, nach Pythagoras benannt,
Gilt heute, wie er galt zu seiner Zeit.

Ein Opfer hat Pythagoras geweiht
Den Göttern, die den Lichtstrahl ihm gesandt;
Es thaten kund, geschlachtet und verbrannt,
Ein Hundert Ochsen seine Dankbarkeit.

Die Ochsen seit dem Tage, wenn sie wittern,
Dass eine neue Wahrheit sich enthülle,
Erheben ein unmenschliches Gebrülle;

Pythagoras erfüllt sie mit Entsetzen;
Und machtlos, sich dem Licht zu widersetzen,
Verschliessen sie die Augen und erzittern.

ADELBERT v. CHAMISSO 1835.

s. „Gedichte“, z. B. die Ausg. Deutsches
Verlagshaus Bong & Co., p. 412.

Tönt es nicht heute lauter denn je, das Gebrülle aller
Dunkelmänner, aller Feinde der freien Meinungsäusserung und
Forschung wider den neuen pythagoräischen Lehrsatz, die
Lehre Darwins?

L. BOLTZMANN.

„Gustav Robert Kirchhoff“, Akad. Festrede
Graz 15. XI. 1887 (Leipzig 1888), p. 32.

Mathesis et ars et scientia dicenda.

L. KRONECKER.

Doctorthese Berlin 1845.

s. Werke, Bd. 1, p. 73.

May not Music be described as the Mathematic of sense, Mathematic as Music of the reason?¹⁾ the soul of each the same! Thus the musician feels Mathematic, the mathematician thinks Music, — Music the dream, Mathematic the working life — each to receive its consummation from the other when the human intelligence, elevated to its perfect type, shall shine forth glorified in some future Mozart-Dirichlet or Beethoven-Gauss — a union already not indistinctly foreshadowed in the genius and labours of a Helmholtz!

J. J. SYLVESTER.

(„Trilogy“), Philos. Transactions, vol. 154,
part III (1864), p. 613; cf. also British Assoc.
Report 1869, Notices and Abstracts, p. 7.

Quoique vous soyez celui de toute l'Europe que je tiens pour le plus grand géomètre, ce ne seroit pas cette qualité-là qui m'auroit attiré²⁾, mais que je me figure tant d'esprit et d'honnêteté en votre conversation que c'est pour cela que je vous rechercherois.

. . . pour vous parler franchement de la Géométrie, je la trouve le plus haut exercice de l'esprit: mais en même temps je la connois pour si inutile que je fais peu de différence entre un homme qui n'est que géomètre et un habile artisan. Aussi je l'appelle le plus beau métier du monde, mais enfin ce n'est qu'un métier, et j'ai dit souvent qu'elle est bonne pour faire l'essai, mais non pas l'emploi de notre force.

¹⁾ Mit genau demselben Ausspruch leitete J. Petzval (1807—1891) regelmäßig seine akustischen Vorlesungen an der Wiener Univers. ein; s. L. Gegenbauer, „Ein vergessener Österreicher“, Deutsche Mathem.-Verein. Jahresber. 12 (1903), p. 331.

²⁾ Zu einer Reise nach Toulouse, dem Wohnorte Fermat's.

De sorte que je ne ferois pas deux pas pour la Géométrie et je m'assure que vous êtes fort de mon humeur. . . . Je m'y étais mis, il y a un an ou deux, par une raison tout à fait singulière, à laquelle ayant satisfait, je suis au hasard de ne jamais plus y penser.

PASCAL à Fermat.

De Bienassis, 10. VIII. 1660.

voir Fermat, Oeuvres, t. 2 (1894), p. 451

= Blaise Pascal, Oeuvres, t. 4 (1779), p. 446/447.

Wenn der Giessener Physiker Heinrich Buff die Mathematik lobte, so sagte Liebig: „Nun, sie ist ein Federmesser“. Hierbei lag die Abneigung zu Grunde, die alle morphologischen Denker gegen das rein Formale hegen, und es sollte zugleich angedeutet werden, dass hilfreiche Rechner ebenso leicht zu finden seien wie Leute, die einem Schriftsteller die Feder schneiden.

G. F. KNAPP.

s. Münchener Allgem. Zeitg. Beilage 11. III. 1903, p. 450.

La géométrie est la clef de toutes les portes, et je vais travailler à l'acquérir.

MARQUISE DU CHÂTELET à Frédéric le Grand.

Cirey, 27. II. 1739.

voir Oeuvres de Frédéric le Grand,

t. 17 (Édition Decker 1851), p. 22.

On a dit que l'analyse mathématique était un instrument. La comparaison peut être admise, pourvu qu'on accorde en même temps que cet instrument, comme le Protée de la Fable, doit sans cesse changer de forme.

ARAGO.

Oeuvres, t. 2 (1854), p. 694 = Werke, Bd. 2 (1854), p. 573.

Ein Onkel von mir behauptet, dass man nur irgend jemand aus dem Tollhause oder Irrenhause zu nehmen brauchte, das würde gewiss der beste Mathematiker sein; ich sage dazu und so meint auch Dirichlet, man könne allenfalls behaupten, die Mathematik sei überhaupt eine Verirrung, deshalb braucht aber nicht jede Tollheit mathematischer Natur zu sein. Besagter Onkel, der, wie alle meine Verwandten (ich Glücklicher in ihrer Mitte?) die Menschen nur nach ihrem Werte (des Geldes) schätzt, meinte auch, als ich ihm mit vieler Mühe durch Beispiele die Zerlegbarkeit der Primzahlen $4n+1$ in zwei Quadrate und die Nichtzerlegbarkeit derer $4n+3$ darthat, „allerdings sei es merkwürdig, aber es gehöre der hyperimaginärste Grad von Verrücktheit dazu, auf so etwas zu verfallen, was ist das schon für Unsinn 'ne Primzahl, nu machen se da noch 'nen Unterschied zwischen $4n+1$ und $4n+3$, was kommt mer davon heraus;“ die Goldmachekunst ist freilich weit besser. Dieser ist noch der geistreichste von meinen Verwandten, nun urteilen Sie über die andern und welche Rolle ich unter ihnen spielen muss.

EISENSTEIN an M. A. Stern.

Berlin, 10. II. 1848.

s. Abh. zur Gesch. d. Math. 7 (1895), p. 189/190.

... la géométrie est une espèce de hochet que la nature nous a jeté pour nous consoler et nous amuser dans les ténèbres.

D'ALEMBERT à Frédéric le Grand.

Paris, 17. IX. 1764.

voir Oeuvres de Frédéric le Grand,
t. 24 (Édition Decker 1854), p. 385.

D'Alembert, vers la fin de sa vie, songeant à ses premiers travaux, écrivait avec émotion: „Les mathématiques ont été pour moi une maîtresse!“

JOSEPH BERTRAND.

„D'Alembert“ (Paris 1889), p. 32.

Die Mathematik ist doch die angenehmste Wissenschaft; sie und die Astronomie vertreten bei mir Tanzgesellschaften, Konzerte und andere derartige Belustigungen, die ich nur dem Namen nach kenne.

BESSEL 1802 als Kaufmannslehrling.

s. „Bessel als Bremer Handlungslehrling“, herausg. v. d. Gesellsch. [Kaufm. Verein] „Union“ (1890), p. 32.

Que mes occupations arithmétiques me rendent heureux dans un temps où je ne vois autour de moi que le malheur et le désespoir! Ce ne sont que les sciences, le sein de sa famille et la correspondance avec ses amis chéris, où l'on puisse se dédommager et se reposer de l'affliction générale.

GAUSS à Sophie Germain.

Göttingue, 19. I. 1808.

voir Sophie Germain, Oeuvres philosophiques, édition de Stupuy (1896), p. 284.

Ich bin zu sehr herabgestimmt und habe nicht genug Lebensfreude, um etwas Litterarisches zu schreiben. Alles im Leben erscheint mir so verblasst und uninteressant. In solchen Augenblicken taugt die Mathematik besser; man freut sich, dass eine Welt so ganz ausserhalb unser selbst existiert. Man ist geneigt, von dem unpersönlichen Stoff zu reden.

S. KOVALEVSKY 1887.

s. A. Charl. Leffler, „Sonja Kovalevsky“, Deutsche Ausg., Reclam-Bibl. No. 3297/3298, p. 110.

Die Arbeit an und für sich, das abstrakte Suchen nach wissenschaftlichen Wahrheiten befriedigte Sonja Kovalevsky nicht, sie wollte verstanden werden, wollte, dass man ihr auf halbem Wege entgegenkomme, sie bewundere und ermuntere

um jedes Fortschrittes willen, den sie machte, jedes neuen Gedankens wegen, der in ihr entstand. Sie wollte ihres Geistes Kind jemand schenken, jemand damit bereichern, nicht bloss die Menschheit im abstrakten Sinne, sondern ein bestimmtes Individuum, das ihr dafür das seinige geben sollte.

Trotzdem sie Mathematikerin war, schwebten ihr nicht bloss abstrakte Ziele vor, denn sie war leidenschaftlich persönlich in ihrem ganzen Denken und Urteilen. Mittag-Leffler pflegte oft zu äussern, dass dieses Bedürfnis nach Verständnis eine weibliche Schwachheit bei ihr sei. Wirklich geniale Männer seien nicht auf diese Weise von anderen abhängig. Sie aber behauptete das Gegenteil und führte eine Menge Beispiele von Männern an, denen die Liebe zu einem Weibe ihre besten Ideen eingegeben habe. Die meisten dieser waren indes Dichter; unter den Gelehrten war es schwieriger, Belege für diesen Satz zu finden. Gewiss ist, dass es ihr gelang, eine Menge Beispiele vorzuführen, wie gerade das Gefühl der Einsamkeit das grösste Leid fast aller tiefer angelegten Naturen sei, dass der Fluch auf dem Menschen ruhe, sich immer als das höchste Glück zu träumen, [ganz und gar in einem andern Wesen aufgehen zu können und doch immer im Innersten einsam bleiben zu müssen.

A. CHARL. LEFFLER.

„Sonja Kovalevsky“,

Deutsche Ausg., Reclam-Bibl. No. 3297/3298, p. 84/85.

Manche Menschen sind sich selbst genug, ich bin nicht so glücklich, sondern mich foltert die fortwährende Sehnsucht nach Liebe und Zuneigung der Menschen und nach gemüthlicheren Verhältnissen, mathematische Beschäftigung ist für mich eine Art Betäubung, um mich vor Melancholie zu retten, so wie für andere Menschen Wein oder Branntwein; daher ist meine Stimmung am düstersten gerade nach Absolvierung eines schwierigen mathematischen Problems, da ich dann recht

einsehe, wie sich hierdurch doch garnichts in meiner Lage ändert.

EISENSTEIN an M. A. Stern.

Berlin, 10. II. 1848.

s. Abh. zur Gesch. d. Math. 7 (1895), p. 190/191.

Plato in Phaedro fingit duplices animas, quarum alteras ait alatas esse, alteris, inquit, decidisse alas. Porro alatas ait volitare in coelum, fruentes congressu colloquioque Dei, et pulcherrimo spectaculo cursuum coelestium, et considerare causas omnium mutationum in inferiore natura, in aëre, in animantium corporibus, in hominum studiis et moribus, in variis imperiorum et civitatum casibus. Atque hae animae toto volitantes coelo captae pulchritudine divinarum rerum, et illius admirandi ordinis et suavitate doctrinae et virtutis, hac una voluptate perpetuo frui cupiunt, nec onerant animos obscoenis voluptatibus, quae perturbant harmoniam virtutis in animis, et obiiiciunt caliginem, ne coelestia aspicere possint. At illae animae, quibus alae deciderunt, humi vagantur, et quaerunt voluptates impuras ex rebus terrenis, nec enim illam pulcherrimam lucem rerum coelestium aspiciunt. Etsi autem Plato alas intelligit heroicis impetus ingeniorum, tamen ne illi quidem impetus soli animos subvehunt, sed opus est etiam artibus, quibus illi ipsi impetus attollantur. Sunt igitur alae mentis humanae, Arithmetica et Geometria. Has si alligaverit sibi aliquis praeditus ingenio non sordido, facillime penetrabit in coelum ac libere in coelestium coetu vagabitur, et illa luce ac sapientia fruetur.

Quare illi qui sunt ingeniis non monstrosis praediti, et res optimas maximeque admirandas, et cognitione dignas aspicere cupiunt, has alas sibi addant, videlicet, Arithmeticen et Geometriam. — — — —

PHILIPP MELANCHTHON 1536.

„In arithmeticen praefatio Georgii Joachimi Rhetici“.

v. Corpus Reformatorum, ed. Bretschneider,

vol. 11 (Halle 1843), p. 288.

Un ancien disait que l'Arithmétique et la Géométrie étaient les ailes des Mathématiques; je crois, en effet, qu'on peut dire sans méthaphore que ces deux sciences sont le fondement et l'essence de toutes les sciences qui traitent des grandeurs. Mais non-seulement elles en sont le fondement, elles en sont, pour ainsi dire, encore le complément; car, lorsque l'on a trouvé un résultat, pour pouvoir faire usage de ce résultat, il est nécessaire de le traduire en nombres ou en lignes; pour le traduire en nombres, on a besoin du secours de l'Arithmétique; pour le traduire en lignes, on a besoin du secours de la Géométrie.

LAGRANGE.

„Leçons élémentaires sur les Mathématiques données à l'École Normale en 1795“, Leçon seconde.
voir Oeuvres de Lagrange, t. 7 (1877), p. 198.

Die Mathematiker sind eine Art Franzosen: redet man zu ihnen, so übersetzen sie es in ihre Sprache, und dann ist es alsobald ganz etwas Anderes.

GOETHE.

„Fernerer über Mathematik und Mathematiker.“
s. Werke, Grosse Weimarsische Ausg., Abth. II,
Bd. 11 (1893), p. 102.

Purus mathematicus, purus asinus.

Sprichwort

unbekannten Ursprungs.

*οἱ τε φύσει λογιστικοὶ εἰς πάντα τὰ μαθήματα ὡς ἔπος
εἰπεῖν ὁξεῖς γίνονται πάντων δὲ ἕνεκα τούτων οὐκ
ἀφετέον τὸ μάθημα, ἀλλ' οἱ ἀριστοὶ τὰς φύσεις παιδευντέοι
ἐν αὐτῷ.*

[Die von Natur zum Rechnen Geschickten entwickeln so ziemlich für alle Wissenschaften Scharfsinn. . . . daher darf

diese Wissenschaft nicht vernachlässigt werden, sondern die von Natur Edelsten müssen in ihr unterrichtet werden.]

PLATO.

Πολιτεία [Staat], 7, 526b et c.

v. Opera II, Bibl. Didotiana 46 (Paris 1883), p. 132, 12–21.

οἱ γὰρ μαθηματικοὶ ἔχουσι τῶν αἰτίων τὰς ἀποδείξεις, καὶ πολλάκις οὐκ ἴσασι τὸ ὅτι, καθάπερ οἱ τὸ καθόλου θεωροῦντες πολλάκις ἓνα τῶν καθ' ἕκαστον οὐκ ἴσασι δι' ἀνέπισκεψίαν.

[Die Mathematiker besitzen die Darlegungen der Gründe und wissen oft nicht das Was, gleichwie sie oft, das Ganze betrachtend, einiges von den Einzelheiten nicht wissen, da sie es nicht berücksichtigt haben.]

ARISTOTELES.

Ἀναλυτικὰ ὕστερα [Zweite Analytik], Lib. I, Cap. XIII, 15.

v. Bibl. Didotiana 9, Aristotelis operum vol. I, p. 135, 7–9.

Les géomètres qui ne sont que géomètres ont . . . l'esprit droit, mais pourvu qu'on explique bien toutes choses par définitions et principes, autrement ils sont faux et insupportables, car ils ne sont droits que sur les principes bien éclaircis.

PASCAL.

„Pensées“, édition complète de J.-F. Astié (Paris 1883), p. 324.

Blaise Pascal, Newton et d'Alembert, tous trois les plus grands géomètres de l'Europe, ont dit force sottises, l'un dans ses apophthegmes moraux, l'autre dans son Commentaire sur l'Apocalypse, et celui-ci sur la poésie et l'histoire.¹⁾ La géométrie pourrait donc bien ne pas rendre l'esprit aussi juste qu'on le lui attribue. Le préjugé favorable à la géométrie en avait fait un axiome; ce n'est pas même un problème après

¹⁾ s. Note 3 am Ende des Buches.

les trois grands géomètres que je viens de citer, et qui ont tous trois si pitoyablement raisonné.

FRÉDÉRIC LE GRAND au Marquis d'Argens.

Bettlern, 25. V. 1762.

voir Oeuvres de Frédéric le Grand, t. 19 (Édition

Decker 1852), p. 321/322.

Im übrigen gefällt mir sein dessein [Herausgabe des „Tentamen novae theoriae Musicae . . .“ (1739)]¹⁾ ganz wohl, weilen aufs wenigste die Theoria musices dadurch perfectionnirt und gewiesen wird, dass ein Mathematicus schier alle Wissenschaften auszuführen im Stande ist, da hingegen andere Meister, die nur Practici sind, von ihrer eignen Kunst nicht anderst schreiben als wie ein blinder von der Farb.

JOH. BERNOULLI an L. Euler.

11. VIII. 1731.

s. „Correspondance mathém. et phys. de quelques célèbres géomètres du 18^{ème} siècle“, t. 2 (1843), p. 10

= J. f. Math. 23 (1842), p. 200.

Die ökonomische Commission [der Berliner Akademie] war der Meinung, eine der nothwendigsten und dringendsten Ausgaben wäre die Vollendung des Baues der Mauer um den botanischen Garten, so wie die Anschaffung einiger Thiere für den Gärtner zur besseren und leichteren Besorgung der Arbeiten; aber Euler widersetzte sich hier mit allen Kräften, und als man ihn um die Gründe seines Verfahrens fragte, erwiederte er ganz unverholen: „es gäbe nichts Unwichtigeres als einen botanischen Garten; die ganze Botanik sei nichts als eine Spielerei und überhaupt nur eine Wissenschaft in der Welt, die Mathematik nämlich.“

THIÉBAULT.

„Friedrich der Grosse“ [Deutsche Ausg. der „Souvenirs de vingt ans de séjour à Berlin“], Th. 2 (Leipzig 1828), p. 165/166;

s. a. Franz. Ausg., t. 5 (Paris 1804), p. 14.

¹⁾ s. Note 4 am Ende des Buches.

Daran erkenn' ich den gelehrten Herrn!
Was ihr nicht tastet, steht euch meilenfern;
Was ihr nicht fasst, das fehlt euch ganz und gar;
Was ihr nicht rechnet, glaubt ihr, sei nicht wahr;
Was ihr nicht wägt, hat für euch kein Gewicht;
Was ihr nicht münzt, das, meint ihr, gelte nicht.

Mephistopheles.

GOETHE, „Faust“ II, Akt 1 (Kaiserliche Pfalz).

Tu me crois obsédé par un mauvais génie
Alcippe, tu te plains de l'étrange manie
Qui fait qu'en ma maison devenu prisonnier
D'un flot d'X et d'Y je couvre mon papier.
Laisse là, me dis-tu, l'algèbre et les formules,
Laisse là ton compas, laisse là tes modules
C'est un emploi bien triste et des nuits et des jours,
Que d'intégrer sans fin et de chiffrer toujours,
Apprendrons-nous enfin à quoi servent tes veilles,
Ce qu'elles produiront d'étonnantes merveilles,
Et si de tes calculs le magique pouvoir,
Doit calmer au matin les tristesses du soir?
Tu pourrais sembler digne et d'honneur et d'estime,
Chacun te saurait gré du zèle qui t'anime,
Si sur le prix de l'or tu daignais réfléchir
Et faisais faire un pas à l'art de s'enrichir.

CAUCHY.

D'une „Épître d'un géomètre à un jeune poète“,
lue dans une séance publique des cinq académies.
voir J. Bertrand, „Éloges académiques“,
Nouvelle série (Paris 1902), p. 119.

Ein guter Mathematiker ist ein guter Schachspieler, also
dieser jener — ein guter Mathematiker weiss die Differenzial-
rechnung zehnmal besser als ein elender — und ein guter
Differenzialrechenmeister versteht sich so gut als einer aufs

Deployieren und Schwenken¹⁾ und kann mithin seine Kompagnie (und seine Frau vollends) zu jeder Stunde kommandieren — und warum sollte man einem so geschickten, so erfahrenen Offizier seine einzige Tochter nicht geben?

Obristforstmeister v. KNÖR bei

JEAN PAUL, „Die unsichtbare Loge“, Erster Sektor.

s. Jean Paul, Werke (Ausg. Reimer Berlin), Bd. 1 (1840), p. 4.

Avec toute l'algèbre du monde, on n'est souvent qu'un sot, lorsqu'on ne sait pas autre chose.

FRÉDÉRIC LE GRAND à Voltaire.

16. V. 1749.

voir Oeuvres de Frédéric le Grand, t. 22
(Édition Decker 1853), p. 199.

Chose étrange! il paraît que le désir de se faire mieux apprécier par le Roi de Prusse²⁾ et par la haute société de Berlin qui, à l'exemple du Roi, affectionnait beaucoup les sciences, il paraît, dis-je, que ce désir avait engagé Euler à ne livrer à l'Académie de cette ville que des travaux d'application de préférence, et à ne se servir que de la langue française. Or, l'analyse était, comme on le sait, l'admirable instrument qu'il maniait avec le plus d'habileté et de prédilection. Durant cette période, tous ses travaux de pure théorie, rédigés en latin, trouvaient donc un débouché à l'Académie de St.-Pétersbourg qui les accueillait avec empressement.

P. H. FUSS.

„Notice sur la vie et les écrits de Léonard Euler“
dans „Correspondance mathém. et phys. de quelques
célèbres géomètres du 18^{ème} siècle“, t. 1 (1843), p. XL.³⁾

. messieurs les géomètres, qui carrent éternellement des courbes inutiles; je les laisse avec leurs points sans étendue

1) Hier Anmerkung Jean Paul's mit Hinweis auf ein Werk, in dem die Differentialrechnung zum Zweck der Verwendung bei den oben genannten militärischen Operationen gelehrt wurde.

2) s. S. 85.

3) Vgl. a. Euler's Brief an Goldbach, d. d. 4. VII. 1744, ibidem p. 292.

